Teoría – Preparación de Selectividad

Mates de Selectividad - Frases Esenciales

Índice de contenido

¿Por qué este resumen?

Por ofrecer una ayuda final de cara a Selectividad.

Agrupo ideas esenciales que deben quedar claras para el examen de Matemáticas de Selectividad. Todos los conceptos de Bachillerato no entran en el examen. El texto está organizado en breves párrafos, directos y que vayan al grano. Sin formulismo matemático, sino de palabra, de forma narrativa.

Además, en la web publico estas ideas en formato audio.

Esto no es la teoría del curso... para eso está toda la web y todo el trabajo de clase. Es un intento de fijar ideas que debemos llevar muy, muy claritas a Selectiviad para evitar “patones groseros” o “fallos garrafales”. Los archivos de audio desean favorecer la memorización de ideas.

Por descontado, lo esencial es el trabajo personal de cada alumno: hacer, hacer, hacer y rehacer los problemas de todo el curso.

Unos breves consejos previos. **Explica todos los pasos matemáticos que des**. **Razona adecuadamente**. No pongas ecuaciones y más ecuaciones sin conexión. Explica qué haces cada vez, explica qué obtienes y explica dónde lo aplicas.

Cuando resuelvas un ejercicio, no recuadres sin más la solución y listo. **Relaciona la solución obtenida con lo que te pide el enunciado**. Por ejemplo: esta solución da la recta en paramétrica que buscábamos; o este valor maximiza el área solicitada; etc.

Y si ves que obtienes un sinsentido, que claramente te has equivocado y has llegado a unos resultados sin “pies ni cabeza”, se te acaba el tiempo y no encuentras el fallo, puedes al menos escribir que te has dado cuenta de que el resultado no es correcto, expones tus razones, e indicas que no has encontrado el origen de tu error.

Así harás un mejor examen, el corrector lo entenderá mejor y podrá calificarte con más argumentos a tu favor.

¡Suerte!

Dominio y continuidad

1. El dominio de una función $Dom(f(x))$ coincide con los valores de x que puedo aplicar a la función. La imagen $Imagen(f(x))$ son todos los valores que devuelve $f(x)$. Una función es continua en su dominio si puedo dibujar su gráfica sin levantar la mano del papel.

2. El dominio de una suma de funciones es la intersección de los dominios de las funciones. El dominio de un producto de funciones es la intersección de los dominios de las funciones.

3. Los polinomos son continuos en su dominio. Y su dominio es toda la recta real.

4. La exponencial e^x es continua en su dominio. Y su dominio es toda la recta real. Su imagen es $(0,\infty)$. La exponencial de cualquier base siempre pasa por el punto $(0,1)$. El dominio de $e^{f(x)}$ será el dominio del exponente $f(x)$.

5. El seno $sen(x)$ y el coseno $\cos(x)$ son continuos en su dominio. Y su dominio es toda la recta real. La imagen está acotada al intervalo $[-1,1]$. Posee periodicidad 2π . El dominio de $sen(f(x))$ y $\cos(f(x))$ será el dominio del argumento $f(x)$.

6. La tangente $tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}$ es continua en su dominio. Y su dominio es toda la recta real salvo los puntos donde se anula el coseno: $\{-\pi/2,\pi/2,3\pi/2,...\}$. Posee periodicidad π . Si tenemos $tg(f(x))$, el dominio serán todos los reales salvo los puntos donde se cumpla que $f(x)=-\pi/2,\pi/2,3\pi/2...$

7. El cociente de polinomios es continuo en toda la recta real, salvo los valores que anulan al denominador. Si el denominador es una función $g(x)$ arbitraria, debemos hacer $g(x)=0$ para averiguar los valores donde se anula el denominador. Por norma general, los puntos que anulan el denominador son los candidatos a asíntotas verticales.

8. El logaritmo $\ln(x)$ es continuo en $(0,\infty)$. El dominio del logaritmo de una función $\ln(f(x))$ nos pide hacer $f(x)>0$ y resolver dicha inecuación. El logaritmo de cualquier base siempre pasa por el punto $(1,0)$.

9. La raíz cuadrada $\sqrt{x}$ es continua en $\Re^{+}+\{0\}$. El dominio de la raíz de una función $\sqrt{f(x)}$ nos pide hacer $f(x)\geq 0$ y resolver dicha inecuación.

Composición y función inversa

1. Componer dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de la forma $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ implica sustituir $g(x)$ donde aparezca x en la función $f(x)$.

2. Para determinar el dominio de una composición $f[g(x)]$, primero determinamos el dominio de $g(x)$ y nos quedaremos con aquellos valores de x que además cumplan que la imagen $g(x)$ pertenezca al dominio de $f(x)$.

3. Dos funciones son inversas si se cumple $f[g(x)]=g[f(x)]=x$ .La gráfica de dos funciones inversas se reflejan a través de la recta $y=x$. Si existe, la inversa de una función es única.

4. Para obtener la inversa $f^{-1}(x)$ se iguala $y=f(x)$, se despeja x en función de y , y finalmente se intercambia el nombre de las variables.

5. El dominio de la función inversa $f^{-1}(x)$ es la imagen de la función $f(x)$, y viceversa.

6. Mirando la gráfica de una función podremos decir que admite inversa en un intervalo cerrado $[a,b]$ si a cada valor de la variable x le corresponde un único valor de la imagen $f(x)$ y viceversa. Puede ocurrir que una función no admita inversa en todo su dominio (por ejemplo $f(x)=x^2$ en toda la recta real), pero sí admita inversa en un intervalo contenido en el dominio (por ejemplo $f(x)=x^2$ en los reales positivos).

Valor absoluto

1. Gráficamente, el valor absoluto pone en positivo donde la función sea negativa. Es como si reflejamos los valores negativos de la función a lo largo del eje horizontal.

2. Antes de estudiar funciones con valor absoluto, operar, hacer límits, etc., debemos romper el valor absoluto en tramos.

3. Para romper el valor absoluto $|f(x)|$ debemos obtener las raíces de $f(x)$ y evaluar el signo de $f(x)$ en los intervalos que se forman entre las raíces.

4. Solo estudiamos, en un primer momento, lo que está dentro del valor absoluto. Si hay una fracción, deberemos considerar tantos las raíces del numerador como las del denominador. Donde la función sea positiva, se quita el valor absoluto. Donde la función sea negativa, se quita el valor absoluto y se coloca delante un signo negativo. Así deberemos operar en ejemplos como $f(x)=\frac{x}{1-\left|\frac{x}{x-1}\right|}$, hasta convertirla en una función a trozos, donde los puntos fronteras son las raíces de numerador y del denominador de la expresión que está dentro del valor absoluto.

5. Si me piden resolver $|f(x)|=7$, por ejemplo, lo más cómodo es operar dos veces, una con más y otras con menos. Es decir: $f(x)=7$ y $-f(x)=7$, y resolver en cada caso.

Asíntotas y límites

1. En las asíntotas verticales $x=x_0$ siempre debemos hacer los límites laterales, para saber si la función tiende a más o a menos infinito a la derecha y a la izquierda de x_0. Una asíntota vertical es una recta vertical.

2. Las asíntotas horizontales $y=k$ se calculan haciendo el límite de la función cuando x tiende a infinito. Una asíntota horizontal es una recta horizontal (pendiente nula).

3. Si no hay asíntota horizontal, pueden aparecer asíntotas oblicuas $y=mx+n$. Donde $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$. El resultado será una recta con pendiente no nula. Si hay asíntota horizontal, seguro que no habrá oblicua.

4. Una función $f(x)$ es continua en un punto x_0 si existe la imagen de ese punto $f(x_0)$, si existen los límites laterales y coinciden $L^-=L^+=L$, y si el valor del límite coincide con el valor de la imagen $f(x)=L$.

5. Si la función no está definida en el punto, y los límites laterales existen, son finitos y coinciden, tendremos una discontinuidad evitable.

6. Si los límites laterales existen, son finitos pero no coinciden, tendremos una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

7. Si los límites laterales existen, y al menos uno es infinito, tendremos una discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito.

8. Si al menos uno de los límites laterales no existe, tendremos una discontinuidad no evitable de segunda especie.

9. No confundir que el límite tienda a infinito con que el límite no exista. Son dos cosas distintas.

10. Si en una función definida a trozos me piden estudiar la continuidad en todo su dominio, tendré que estudiar la continuidad en los intervalos abiertos y la continuidad en los puntos frontera que dividen cada intervalo. En los intervalos abiertos aplico explícitamente las reglas generales de continuidad de las funciones elementales

(polinomios, senos, cocientes, etc.).

11. En los puntos frontera debo aplicar límites laterales. Ojito al elegir las funciones donde aplicar el límite por la izquierda o por la derecha del punto frontera. Atento a las desigualdades. Si una función no está definida a un lado del punto frontera, no tiene sentido que hagamos el límite lateral por ese lado.

12. Lo primero que hacemos en un límite es evaluar. Y si aparecen indeterminacions, aplicamos las técnicas de resolución. Las indeterminaciones de límites que debo saber resolver son $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$. No siempre hay que aplicar L'Hôpital a la fuerza. A veces es más sencillo factorizando, multiplicando y dividiendo por conjugado o haciendo mínimo común múltiplo, para simplificar finalmente.

13. En el tipo $0\cdot\infty$ debemos dar la vuelta a uno de los factores para obtener una indeterminación $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

14. En los límites en el infinito de cociente de polinomios es práctico resolverlos viendo el grado de los polinomios y explicando con palabras el razonamiento final. Si el grado del numerador es mayor, el límite va infinito (el signo depende delos coeficientes que acompañan a las máximas potencias). Si el grado del denominador es mayor, el límite va a 0. SI los grados coinciden, el límite tiende al cociente de los coeficientes que acompañan a la máxima potencia. Si no deseamos explicarlo así, podemos dividir todos los término por la máxima potencia del polinomio, simplificar y evaluar. Recuerda que un número no nulo dividido por infinito, siempre vale 0.

15. En un límite nos acercamos al valor x_0 tanto como queremos, por la derecha como por la izquierda. Pero nunca llegamos a x_0 .

Resolver ecuaciones. Rufinni. Bolzano

1. Ojito al resolver ecuaciones de primer y segundo grado. Cuidado al despejar y con los signos. Las prisas son malas consejeras.

2. En polinomios de grado 3 aplicamos Rufinni. Es bueno tener claro el binomio de la suma, el binomio de la diferencia y el binomio de suma por diferencia, porque agilizan muchos los cálculos.

3. En ecuaciones de segundo grado que deseo factorizar por Rufinni o por la fórmula general de segundo grado, debes tener en cuenta que si el coeficiente que acompaña a x^2 no es la unidad, ese factor multiplicará a toda la factorización.

4. Recuerda: si la raíz es, por ejemplo $x=1$, el binomio en la factorización quedará $(x-1)$. Ojito con los signos.

5. Si al resolver aplicas raíz cuadrada, considera tanto el signo positivo como el negativo.

6. El Teorema de Bolzano dice: si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y se cumple $f(a)\cdot f(b)<0$, existirá una solución de la función $c\in(a,b)/ f(c)=0$.

7. Bolzano es útil para demostrar la existencia de al menos una solución en un intervalo. Fíjate que el punto solución c pertenece al intervalo abierto (no al cerrado). Es muy poco probable que, en Selectividad, deba aplicar el método de aproximación de Bolzano para obtener la solución con una precisión de una o dos cifras decimales.

8. Es común en los ejercicios de Bolzano tomar como extremos de ese intervalo el más o menos infinito. Es como hacer el límite de la función en el infinito. Recuerda que más infinito es como “un número positivo” y menos infinito es como “un número negativo”.

9. Cosas de “culturilla matemática”. Si tengo un cociente igualado a cero, debemos igualar directamente el numerador a cero. Si tengo un producto de términos igualado a cero, resuelvo igualando cada término a cero. Esto se puede hacer siempre que esté igualando a cero.

Derivabilidad y definición formal de derivada

1. La definición formal de derivada de una función es $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Si tengo que aplicarla en algún ejercicio, deberé operar (factorizar, hacer mínimo común múltiplo, multiplicar por conjugado, etc.) y simplificar para no tener indeterminación. En la definición formal de derivada no se puede aplicar L'Hôpital.

2. El valor de la derivada en un punto x_0 , mediante la definición formal, puedo hacerla como $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y luego evaluar $f'(x_0)$. O bien modificar la definición formal de derivada $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

3. Si no me dicen explícitamente que lo haga por la definición formal de la derivada, mejor aplicar la tablas de derivación. Apréndete toda la tabla de derivación, incluidos los arcosenos, arcotangentes, etc. Y práctica la regla de la cadena (derivar de fuera hacia dentro en composición de funciones).

4. Una función es derivable en un intervalo abierto, si la función y la función derivada son continuas en ese intervalo. Es decir, si la función es continua en un intervalo, estudiar su derivabilidad es estudiar la continuidad de la función derivada. Y aplicamos las reglas generales de continuidad de las funciones elementales: polinomios, senos, exponenciales, etc.

5. Los polinonomios, el seno, el coseno y la exponencial son derivables en toda la recta real. La función logaritmo es derivable en los reales positivos.

6. Una función es derivable en un punto x_0 , si es continua en ese punto y si las derivadas laterales coinciden. Es decir: $f'(x_0^-)=f'(x_0^+)$. Importante: para saber si una función es derivable en un punto miramos solo las derivadas laterales, no necesitamos el valor de la derivada en ese punto.

7. Si al estudiar una derivada lateral, en una función a trozos, aparece una indeterminación, recuerda que en el fondo es un límite y puedes aplicar las técnicas de resolución de límites.

$$f'(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f'(x) \quad , \quad f'(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)$$

Regla de L'Hôpital

1. Al aplicar L'Hôpital debo indicar siempre las condiciones que deben cumplirse. Si en el límite de un cociente $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ aparecen indeterminaciones $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$, siendo x_0 un valor real o infinito, si existe el límite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ coincide con el valor de $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

2. El fallo típico en L'Hôpital es derivar como un cociente, y no darte cuenta que debes derivar numerador y denominador por separado.

3. Si en un límite llego a una expresión $\frac{k}{0}$ y me dicen que el límite debe ser finito, necesariamente $k=0$ para obtener una indeterminación, y que el resultado no se vaya a infinito. Así podré calcular el valor final del límite.

4. La regla de L'Hôpital se puede aplicar de manera sucesiva. Consejillo: si la aplicas cuatro veces y la cosa no se resuelve... es muy probable que en algo te has confundido.

Interpretación geométrica de la derivada. Recta tangente a la función en un punto

1. La interpretación geométrica de la derivada afirma que la derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

2. Es muy común que caiga un problema de sacar la recta tangente a la función en un punto x_0 . Con la ecuación punto-pendiente de la recta $m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ solo debemos obtener la imagen $y_0=f(x_0)$ y la pendiente $m=f'(x_0)$.

3. Otra forma de presentar la recta es con la ecuación explícita $y=mx+n$, donde m es la pendiente y n es el valor de la ordenada donde la recta corta al eje vertical.

4. Otra ecuación útil de la recta es la canónica $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, donde $(a,0)$ y $(0,b)$ son respectivamente los cortes de la recta con el eje horizontal y con el eje vertical.

5. La recta normal a otra dada es su recta perpendicular. Recuerda que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1.

Extremos relativos. Estudio de una función

1. La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada igual a 0. Da como resultado los puntos críticos, que son los candidatos a extremos relativos. Si no hay puntos críticos, no hay extremos relativos. Si me piden obtener la imagen del extremo relativo en $x=x_0$, debo hacer $(x_0, f(x_0))$.

2. Una primera condición suficiente de extremo relativo es colocar en la recta real los puntos críticos y los puntos donde la función no está definida, y evaluar el signo de la primera derivada en cada intervalo. Donde la derivada sea positiva, al función crece. Donde la derivada sea negativa, la función decrece. Alrededor del punto crítico donde haya cambio de crecimiento, tendremos un máximo o un mínimo relativo.

3. Una segunda condición suficiente de extremo relativo es evaluar la segunda derivada en los puntos críticos. Donde sea positivo tendremos un mínimo. Donde sea negativo tendremos un máximo. Donse se anule, no podremos concluir nada.

4. Si me dan un intervalo cerrado y me piden estudiar los extremos absolutos, además de obtener los puntos $(x_0, f(x_0))$ de los extremos relativos, debemos evaluar la función en los extremos de los intervalos para saber si las imágenes son máximos absolutos o mínimos absolutos.

5. La condición necesaria de punto de inflexión es la segunda derivada igual a 0. Obtenemos así los candidatos a puntos de inflexión.

6. La condición suficiente de punto de inflexión implica colocar sobre la recta real los puntos que anulan a la segunda derivada y los puntos donde la función no está definida. Deberemos evaluar la segunda derivada en los intervalos que se forman. Una segunda derivada positiva indica función cóncava hacia arriba U. Y segunda derivada negativa indica una función cóncava hacia abajo ∩.

7. Una segunda condición suficiente de punto de inflexión supone realizar la tercera derivada y evaluar en ella los candidatos a puntos de inflexión. Si la tercera derivada evaluada no es nula, tendremos punto de inflexión.

8. Si me piden el boceto de una función, con un dibujo aproximado (pero bien razonado) es suficiente. Si me piden estudio completo debo mirar dominio, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, paridad e imparidad, periodicidad (si hay trigonométricas), extremos relativos, intervalos de crecimiento, puntos de inflexión, intervalos de

concavidad y un dibujo curioso y bien detallado de la gráfica. Por favor, no hagamos "churri-gráficas".

9. Viendo la gráfica de la función es fácil reconocer las asíntotas verticales si aparecen ramas de la imagen $f(x)$ que se disparan a más o menos infinito. Las asíntotas horizontales y oblicuas se aprecian porque la función tiende a estabilizarse a una recta horizontal o inclinada según la x se hace más o menos infinito. Recuerda algo muy obvio: la x es el eje horizontal y $f(x)$ es el eje vertical.

10. Donde $f(x)$ tenga extremo relativo, la gráfica de la función derivada $f'(x)$ corta al eje horizontal ya que $f'(x)=0$. Donde $f(x)$ tenga un punto de inflexión, la gráfica de la función segunda derivada $f''(x)$ corta al eje horizontal, ya que $f''(x)=0$. Es decir, un punto de inflexión es un extremo relativo de la gráfica de la función derivada $f'(x)$. Otra forma de decirlo: la segunda derivada optimiza la primera derivada.

11. El Teorema de Rolle se aplica a funciones continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en el mismo intervalo pero abierto (a,b) . Si encontramos dos puntos donde las imágenes coinciden $f(a)=f(b)$, podremos concluir que en algún punto del intervalo que forman se alcanzará un extremo relativo, es decir, $\exists c \in (a,b) / f'(c)=0$.

12. Con Rolle es muy sencillo demostrar la existencia de extremo en un intervalo. Y es muy común aplicarlo en problemas donde por Bolzano hemos demostrado que existe al menos una solución de una función continua en intervalo cerrado y derivable en intervalo abierto, y que deseamos demostrar que la solución es única.

Planteamos como hipótesis que hay dos soluciones y, si es así, en esos dos puntos la función tiene la misma imagen al cortar al eje horizontal dos veces. Y si tiene dos imágenes iguales, podremos aplicar Rolle y anular la primera derivada. En esa ecuación llegaremos a un absurdo, que significará que la hipótesis de partida es falsa y solo tendremos una única solución.

13. En los problemas de optimización debemos tener muy clarito cuál es la magnitud física a optimizar: distancia mínima, área máxima, beneficio máximo, etc. Después deberemos escribir la ecuación que relaciona esa magnitud con las variables del enunciado. Si hay más de una variable, deberemos relacionarlas entre si con algún dato del enunciado, para obtener una función de una sola variable. Sobre esta función aplicaremos la condición necesaria de extremo relativo: primera derivada igual a 0. Y luego comprobaremos si tenemos un máximo o un mínimo con alguna de las condiciones suficientes. No olvidar obtener las dimensiones de todas las variables y, si lo piden, la imagen del extremo relativo en la función.

14. En optimización es recomendable controlar las siguientes fórmulas de perímetro, área y volumen. Perímetro de circunferencia, área del círculo, volumen de una esfera, área lateral de un cilindro, volumem de un cilindro, volumen de un paralelepípedo, área lateral de un cono, volumen de un cono.

Integrales

1. De la misma forma que decimos que $f'(x)$ es la función derivada de $f(x)$, podemos afirmar que $f(x)$ es la función integral de $f'(x)$. De manera general, lo diremos así: $f(x)$ admite integral si encontramos una función $F(x)$ tal que cumpla $\frac{d[F(x)]}{dx}=f(x)$. A la función $F(x)$ se le llama primitiva de $f(x)$.

2. Con notación de integral indefinida podemos decir lo mismo: $F(x)+C=\int f(x)dx$. Donde C es la constante de integración y $F(x)+C$ representa el conjunto de infinitas primitivas cuya derivada coincide con $f(x)$. Recuerda que la derivada de una constante es 0. A este conjunto de infinitas primitivas se le conoce como integral indefinida.

3. Si tras realizar la integral indefinida y obtener $F(x)+C$ nos dan una condición de contorno que afirma que la función primitiva para, por ejemplo, por el punto (x_0, y_0) , podremos conocer la constante de integración de manera única evaluando $F(x_0)+C=y_0$ y despejando el valor concreto de C .

4. Dos funciones primitivas solo se diferencian por la constante de integración. Por lo tanto, sus gráfica son idénticas pero desplazadas verticalmente una cantidad igual a la diferencia de sus constantes de integración. No olvidar la famosa C al resolver una integral indefinida.

5. Aplicando de derecha a izquierda la tabla de derivación, podemos obtener la tabla de integrales inmediatas.

5. La integral de una constante por una función, es la constante por la integral de la función. Los números reales pueden entrar y salir de la integral. La variable de integración x nunca, nunca, nunca puede salir fuera del operador integral.

6. La integral de la suma de funciones es la suma de integrales.

7. Si dentro de la integral añadimos un número multiplicando para obtener de forma más clara una integral inmediata, no se nos debe olvidar dividir por ese número fuera de la integral, para balancear el resultado final. Se ordenado y limpio si añades números dentro de la integral, para que el corrector vea claramente lo que estás haciendo.

8. Si añadimos sumando un número dentro de la integral, también deberemos añadir el mismo número pero restando.

9. Los métodos de integración que debemos controlar para Selectividad son los cocientes de polinomios cuyo denominador posee solución real, integración por partes (que se puede aplicar de manera reiterada) y cambios de variable (es recomensable llevar aprendidos los cambios de variable más usuales).

10. En los cocientes de polinomios debemos mirar el grado del numerador y del denominador. Si el grado del numerador es mayor o igual, debemos hacer primero la división de polinomios. Si el grado del denominador es menor, podremos aplicar directamente la técnica de los coeficientes indeterminados. Al hacer la división de polinomios, recuerda: dividendo/divisor = cociente + resto/divisor.

11. Es recomendable dedicar un tiempo a ver si la integral se puede transformar en inmediata. Mirando si el numerador es la derivada del denominador, multiplicando y dividiendo por un número, etc. Controlar la tabla de derivación con fluidez es esencial.

12. Al integrar por partes, ojito con el signo menos que aparece en su definición. Escribir siempre las partes y la fórmula que se aplica.

13. En los cambios de variable no olvidar diferenciar. El cambio afecta tanto a la variable x como al diferencial dx .

14. El teorema fundamental del cálculo integral afirma $\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$, donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, que es continua en $[a,x]$. La regla de Barrow se deduce directamente como $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ como una regla con la que obtener la integral definida de una función $f(x)$ continua en el interrvalo cerrado $[a,b]$.

15. Si la función $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, el área encerrada por su gráfica con el eje horizontal en ese intervalo es $A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, donde aplicamos Barrow (que hay que indicar explícitamente en mi ejercicio).

16. Si la función $f(x) \leq 0$ en $[a,b]$, el área encerrada por su gráfica con el eje horizontal en ese intervalo es $A = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = |F(b) - F(a)|$. Por definición, un área es estrictamente positiva.

17. Se cumple que $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ donde $c\in[a,b]$.

18. Si la función corta al eje horizontal en el intervalo $[a,b]$, deberemos calcular primero dichos puntos de corte y luego calcular las respectivas áreas según los criterios expuestos anteriormente.

19. Los segmentos tienen integral de área nula. Es decir, $\int_a^a f(x)dx=0$.

20. Al calcular el área encerrada por la gráfica de dos funciones, debemos obtener primero los puntos de corte de ambas gráficas (igualando sus ecuaciones y resolviendo), y determinar que curva queda por encima y por debajo de la otra. Para el caso en que $f(x)\geq g(x)$ en el intervalo $[a,b]$, el área encerrada será $A=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$.

21. En los problemas de áreas es común que aparezcan formas sencillas como rectángulos y triángulos, cuyas áreas no es necesario que resolvamos por integrales sino aplicando las formas bien conocidas de base por altura, o de un medio de base por altura.

Gauss y sistemas de ecuaciones. Matrices. Concepto de rango

1. El Sistema Compatible Determinado implica solución única. El Sistema Compatible Indeterminado implica infinitas soluciones, con al menos un parámetro libre. El Sistema Incompatible no tiene solución.

2. La notación matricial de un sistema de ecuaciones genera la matriz del sistema y la matriz ampliada (que incluye la columna de términos independientes).

3. En los sistemas homogéneos todos los términos indepenientes son nulos. Los sistema homogéneos siempre tienen solución. Al menos existe la solución trivial (todas las incógnitas nulas), o puede tener infinitas soluciones (que también incluirá la solución trivial).

4. La resolución por Gauss consiste en hacer nulos todos los coeficientes que están por debajo o por encima de la diagonal principal. Podemos aplicar transformaciones lineales entre filas y entre columnas. E intercambiar la posición de columnas entre sí, y de filas entre sí.

5. En las transformaciones del tipo $F_i'=a\cdot F_i+b\cdot F_j$, recuerda que el factor a que multiplica a la fila antigua que estamos transformando, no puede ser 0. En ese caso, inhabilita Gauss. Si el sistema depende de un parámetro, y he aplicado Gauss, deberé anular los términos de la diagonal principal que dependen del parámetro para determinar qué valores del parámetro debo considerar en la discusión de casos.

6. Al terminar el proceso de matriz diagonal de Gauss, el número de filas no nulas coincide con el número de vectores linealmente independientes que forman la matriz. Este número, a su vez, coincide con el rango de la matriz.

7. Si al aplicar Gauss una fila queda con todos sus coeficientes nulos, significa que es combinación lineal de las otras filas y puedo obviarla. Si tras aplicar Gauss tengo el mismo número de incógnitas que de filas, tendremos un Sistema Compatible Determinado con solución única. Si hay más incógnitas que filas, tendremos un Sistema Compatible Indeterminado (donde la diferencia entre incógnitas y filas será el número de parámetros libres). Y si al aplicar Gauss aparece un absurdo, tendremos un Sistema Incompatible sin solución.

8. En los sistemas homogéneos, con todos los términos independientes, siempre hay

solución. O bien SCD con solución trivial con todas las incógnitas nulas, o bien SCI con infinitas soluciones.

9. No confundas el estudio de una matriz con el estudio de un sistema de ecuaciones. Gauss se puede aplicar a una matriz para ver el rango sin más, o bien se puede aplicar a un sistema para ver el rango de la matriz del sistema y el rango de la ampliada para decidir la existencia o no de solución.

10. La inversa de una matriz, si existe, es única. Se define como $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$. Si se cumple la definición, se tendrá la matriz inversa. Otra forma de obtenerla es con el método de Gauss-Jordan, donde pasamos del par matricial (A/I) a (I/A^{-1}) .

11. El producto de matrices no es conmutativo. Solo puedo multiplicar matrices si el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda. La matriz resultante tendrá tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda.

12. Al despejar en una ecuación matricial debemos tener claro como sacar factor común y cómo aplicar matriz inversa. Por ejemplo: A^2+A es lo mismo que $A(A+I)$. Y si debo despejar X en la ecuación $AX+B=C$ lo haré de la forma $X=A^{-1}(C-B)$. Ojito con el lado: si aplico inversa a la izquierda, en la otra parte de la igualdad también aplico inversa por la izquierda.

13. Si no pudo despejar X en una ecuación matricial, siempre me quedará la opción de dar incógnitas a cada uno de los coeficientes de la matriz y operar, hasta despejar el valor de dichas incógnitas (en una matriz 2x2 necesitaré 4 incógnitas; en una matriz 3x3 necesitaré 9 incógnitas).

14. Si debo resolver un sistema 2x2 o 3x3 sin parámetros, y me estoy liando, siempro puedo utilizar los métodos tradicionales de reducción, sustitución e igualación.

15. Si me dan un sistema con más ecuaciones que incógnitas seguro que habrá un absurdo matemático o al menos podré obviar una ecuación (por ser combinación lineal). En este caso, al obviar ecuaciones, si llego a un sistema con tantas ecuaciones con incógnitas tendré SCD con solución única.

16. Para obtener la matriz enésima A^n aplico inducción. Para ello calculo A , opero para obtener los primeros términos A^2 , A^3 ,... para inducir A^n y demostramos que $A^{n+1}=A^n\cdot A$ partiendo de la forma de A^n y de A

Determinantes. Rango. Teorema de Rouché-Frobenius

1. Un determinante es un número real asociado a las matrices cuadradas. Ojo: no puede hacer determinante a una matriz no cuadrada.

2. En una matriz 1x1 de una sola fila y una sola columna, el determinante es el coeficiente de la propia matriz.

2. En matrices 2x2 el determinante se obtiene multiplicando los términos de la diagonal prinicipal y restándole el producto de los términos de las diagonal secundaria. En determinantes 3x3 aplicamos la regla de Sarrus.

4. Para determinantes de mayor orden, deberemos desarrollar por la suma de los adjuntos de una fila o de una columna. Recuerda que el adjunto de la fila i y la columna j se define como $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot|\alpha_{ij}|$, donde $|\alpha_{ij}|$ es el determinante menor asociado tras tachar la fila i la columna j.

5. Un menor de una matriz es el determinante de cualquier submatriz contenida en la matriz original. En una matriz 3x3 el menor de orden 3 es el determinante de la propia matriz. También contará con 9 menores de orden 2, y con 9 menores de orden 1.

6.Si tengo una matriz 3x2, no hay ningún menor de orden 3 dentro de ella. Sí habrá 6 menores de orden 2 y 6 menores de orden 1

6.Si en un determinante hay dos líneas (filas o columnas) iguales o proporcionales, el determinante se anula. Si en un determinante hay una línea de 0, el determinante se anula.

7. Si intercambio la posición de dos filas o de dos columnas, el determinante cambia de signo.

8. Existe la inversa de una matriz si su determinante no es nulo. Este método es muy práctico para decidir si una matriz, que depende de un parámetro, pueda tener inversa. Hacemos el determinante e igualamos a cero; llegaremos a un polinomio con el parámetro como incógnita. La solución de esa ecuación son los valores que anulan al determinante. Por lo tanto habrá inversa siempre que el parámetro no tome los valores que anulan al determinante. Y la inversa la puedo definir como la matriz de adjuntos traspuesta, partido por el determinante de la matriz.

9. Recuerda que la matriz de adjuntos es la matriz formada por cada uno de los adjuntos A_{ij} en sus correspondientes posiciones.

10. La dimensión del mayor menor no nulo coincide con el concepto de Rango. Por ejemplo, en una matriz 3x3, si el determinante de la matriz es distinto de cero su rango es 3. Si se anula, podrá ser rango 2, para lo cual deberemos buscar al menos un menor de orden 2 no nulo. Si todos se anulan, será rango 1 si encontramos al menos un número de la matriz que no sea nulo.

11. Otra forma de ver la existencia de inversa de una matriz de orden 3 es sabiendo que su rango debe ser 3. O lo que es lo mismo, que cuente con 3 vectores linealmente independientes.

12. El concepto de rango, aplicado a sistemas de ecuaciones, es muy potente gracias al Teorema de Rouché-Frobenius. En un sistema hay solución si el rango de la matriz del sistema coincide con el rango de la matriz ampliada.En caso contrario, no hay solución y estaremos ante un Sistema Incompatible.

13. Si los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, tendremos solución única (Sistema Compatble Determinado).

14. Si los rangos coinciden y son menor que el número de incógnitas, tendremos infinitas soluciones (Sistema Compatible Indeterminado). La diferencia entre el número de incógnitas y el rango es igual al número de parámetros libres.

15. Nunca podemos tener rango de la matriz del sistema mayor que el número de incógnitas.

16. Para resolver SCI con un parámetro libre, doy a una incógnita el valor del parámetro libre (por ejemplo, $z=\lambda$) y resuelvo el resto de incógnitas en función de ese parámetro. Si da la casualidad que la incógnita que voy a coger está definida de manera única en la solución (por ejemplo, $z=1$), no pasa nada. Que no cunda el pánico. Doy a otra incógnita el parámetro libre (por ejemplo, $y=\lambda$).

17. Si tengo dos parámetros libres, lo aplico a dos incógnitas (por ejemplo, $y=\alpha, z=\beta$).

18. Un Sistema Compatible Determinado lo puedo resolver por Cramer. Tiene sentido aplicar Cramer en sistemas 3x3 que dependen de un parámetro, ya que las soluciones también dependerán del parámetro y se facilitan los cálculos. Pero si tengo un sistema 3x3 de números, lo mejor es resolver con los métodos clásicos de reducción, sustitución o igualación.

19. En un sistema 3x3 que sea SCI con un parámetro libre λ no puedo aplicar Cramer, salvo que obvie una ecuación redundante y me quede con un sistema de ecuaciones 2x2 donde el parámetro libre λ pasa a la columna de términos independientes. En ese caso, ya con 2 filas y 2 incógnitas, sí podré aplicar Cramer.

20. El ejemplo típico de Selectividad es un sistema 3x3 que depende de un parámetro. Estudiamos rango de la matriz del sistema. Los valores del parámetro donde el determinante de la matriz del sistema no sea nulo, implicará que el rango de esa matriz y de la ampliada será 3, y tendremos SCD.

21. Acto seguido haremos la discusión de casos, tomando uno a uno los valores que anulaban el determinante de la matriz del sistema. Sustituimos ese valor en el sistema buscamos un menor de orden 2 no nulo para garantizar que el rango es 2. Si todos se anula, buscamos un menor de orden 1 no nulo y el rango será 1.

22. También miramos el rango de la ampliada. Recuerda que la ampliada es una matriz 3x4, por lo que tiene 4 menores de orden 3. En el momento que uno de los menores de orden 3 sea no nulo, el rango de la ampliada será 3. Si todos los menores de orden 3 se anulan, el rango de la ampliada no será 3.

23. Para terminar. Recuerda que el determinante de la matriz inversa es la inversa del determinante de la matriz.

24. El determinante de un número por una matriz es igual al determinante de la matriz multiplicado por dicho número elevado al orden de la matriz.

Ecuaciones de la recta y del plano en tres dimensiones

1. Para escribir la ecuación de una recta necesitamos un punto de la recta y un vector paralelo a la recta.

2. En la ecuación paramétrica aparece, para cada componente de la recta, la componente del punto sumada a la componente del vector multiplicada por un parámetro libre.

3. Si despejamos ese parámetro libre en cada componente e igualamos, tendremos la ecuación continua. Donde cada componente de la recta menos la componente del punto, dividido por la componente del vector, se igualan entre sí.

4. Recuerda. En la ecuación continua, las incógnitas x, y, z deben aparecer con signo positivo.

5. Si tomamos dos igualaciones de la ecuación continua, llegamos a la ecuación general. Por lo general, cada ecuación general es una ecuación con tres incógnitas. Por lo que tendremos un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas.

6. El sistema de la ecuación general es un SCI con un parámetro libre. Para pasar de general a paramétrica, solo deberemos resolver ese sistema. El parámetro libre es el que multiplicará a las componentes del vector en la ecuación paramétrica.

7. Para escribir la ecuación del plano necesitamos un punto del plano y dos vectores linealmente independientes y paralelos al plano. Es lo que se conoce como determinación lineal del plano. La mejor forma de comprobar que dos vectores son independientes es dividir sus respectivas componentes y comprobar que los cocientes no coinciden.

8. En la ecuación paramétrica del plano, cada componente aparece igualada a la correspondiente componente del punto y se suma la componente del primer vector por un primer parámetro libre y se suma la componente del segundo vector por un segundo parámetro libre.

9. El plano no posee ecuación continua. Directamente obtenemos la ecuación general igualando a cero el siguiente determinante: la primera columna la forman las componentes del primer vector, la segunda columna la forman las componentes del segundo vector, y la tercera columna la forman las distintas incógnitas x, y, z menos las componentes del punto. Ojo: no olvidar poner siempre las incógnitas x, y, z .

10.Por lo tanto, la ecuación general del plano es una ecuación de tres incógnitas: $Ax+By+Cz+D=0$

11. Así, podemos ver las dos ecuaciones generales de la recta como dos planos secantes, que se cortan en la recta que forman.

12. Los parámetros A, B, C de la ecuación general del plano forman el vector característico o normal del plano $\vec{u}_{\Pi}=(A, B, C)$ que es perpendicular a dicho plano.

13. Este vector perpendicular proporciona un método muy potente para escribir la ecuación general de un plano. Si conocemos un punto del plano y conocemos un vector perpendicular al plano, podremos escribir $Ax+By+Cz+D=0$ con las componentes $\vec{u}_{\Pi}=(A, B, C)$ del vector, y llevando las coordenadas del punto a la ecuación, podremos despejar el último coeficiente D .

Posición relativa con rectas y planos

1. Siempre que puedas, haz dibujos ilustrativos sobre las distintas posiciones de rectas y planos. Y junto al dibujo, la teoría correspondiente necesaria para resolver lo que pida el problema.

2. La posición relativa de una recta y un plano se puede estudiar de dos formas. La primera forma es tomar las dos ecuaciones generales de la recta y la ecuación general del plano, y formar un sistema 3x3. Si es SCD se cortan en un punto, si es SCI con un paraámetro libre la recta está contenida en el plano, si es SI recta y plano son paralelos y nos tienen solución común.

3. Una segunda forma es sustituir la ecuación paramétrica de la recta en las incógnitas x, y, z de la ecuación general del plano. Así, la única incógnita será el parámetro libre λ de la recta. Si consigo despejar el parámetro libre, tendré SCD y un punto de corte. Si llego a una tautología $0=0$ significa que hay infinitas soluciones para el parámetro libre y tendré SCI con recta contenida en el plano. Si llego a un absurso matemático, del tipo $0=1$, no habrá solución y el SI genera recta y plano paralelos.

4. La posición relativa de dos planos puede hacer estudiando el sistema 2x3 formado por al dos ecuaciones del plano. Pueden cortarse en una recta (SCI con un parámetro libre), pueden ser planos coincidentes (SCI con dos parámetros libres) o pueden ser planos paralelos (SI sin solución). Obviamente, dos planos nunca pueden cortarse en un solo punto.

5. Para estudiar la posición relativa de tres planos estudiamos el sistema 3x3 formado por sus ecuaciones generales. Un SCD indica un único punto de corte, un SCI con un parámetro libre indica que se cortan en una misma recta, un SCI con dos parámetros libres implica que los tres planos son coincidentes, y la opción SI sin solución indica que o bien los tres planos son paralelos entre sí o bien dos se cortan en una recta y el tercero es paralelo a dicah ercta de corte (la difernecia entre estas dos opciones lo marca el valor del rango de la matriz del sistema y de la matriz ampliada).

6. Por último, posición relativa de dos rectas. Hay un método un poco "arduo" que es pasar las rectas a general y estudiar el sistema 4x3 resultante. Yo, personalmente, prefiero otro método: tomar un vector paralelo a cada recta y un vector formado por un punto de cada recta. El rango de la matriz formada por esos dos vectores nos da la siguiente información: Rango=3 significa vectores tridimensionales linealmente independientes, que generan rectas cruzadas. Rango=2 puede ser por dos rectas paralelas o por dos rectas secantes en un punto. Para distinguir ambos casos debemos ver que en rectas paralelas los vectores de las rectas son proporcionales, y en rectas

secantes los vectores de las rectas son independientes. Por último, Rango=1 indica dos rectas coincidentes.

7. Lo dicho: hacemos un dibujo, ponemos a teoría de geometría. Y ya solo nos queda un ejrcicio de rango o de resolver sistemas, cuyas soluciones relacionaremos a modo de conclusión con la teoría expuesta al principio.

Punto arbitrario de una recta. Simetrías

1. Dada una recta en paramétricas, un punto arbitrario de la recta es aquel punto que tiene por componenes las componentes paramétricas de la recta.

2. El concepto de punto arbitrario es muy útil. Por ejemplo, si tengo un punto A externo a una recta r , puedo obtener el punto de corte de r con la recta perpendicular a ella y que pasa por A , considerando un punto arbitrario $P\in r$. De tal forma que el vector $\vec{AP}$ será perpendicular a la recta r , por lo que el producto escalar de $\vec{AP}$ con $\vec{u}_r$ será nuelo. De la condición $\vec{AP}\cdot\vec{u}_r=0$ podremos despejar el parámetro libre de la recta y obtener así las coordenadas del punto P buscado.

3. Con esta idea del punto arbitrario, puedo calcular también el punto simétrico a uno dado respecto a una recta. Seguimos el procedimiento indicado anteriormente, de tal forma que el punto P será el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, donde A es el punto que me dan de partida y A' es el punto simétrico buscado respecto la recta.

4. Se me dan un punto y un plano, y debo obtener el simétrico del punto respecto el plano, razono de la siguiente forma: de la ecuación general del plano obtengo su vector característico, y trazo la recta perpendicular al plano y que pasa por el punto dado A . La intersección de esa recta con el plano nos dará el punto P , que será el punto medio del segmento $\overline{AA'}$. Donde nuevamente A es el punto que me dan de partida y A' es el punto simétrico buscado respecto al plano. Recuerda que en el apartado de posiciones relativas de recta con plano, desarrollamos dos formas de obtener el punto de corte entre ambos.

5. Un problema algo extenso y que cae en selectividad con cierta frecuencia, es el de obtener una recta t perpendicular y secante a dos rectas r y s cruzadas. Razonamos así. Elegimos un punto arbitrario $A\in r$ y un punto arbitrario $B\in s$. Formamos el vector $\vec{AB}$, en cuyas coordenadas aparecerán los parámetros libres de cada recta. Si queremos que este vector $\vec{AB}$ sea paralelo a la recta t , deberá ser perpendicular a los vectores directores de ambas rectas, por lo que cumple simultáneamente que $\vec{AB}\cdot\vec{u}_r=0$ y que $\vec{AB}\cdot\vec{u}_s=0$. Con ambas condiciones formamos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Las incógnitas son los parámetros libres de las rectas. Cuando resuelta, podré obtener los puntos concretos $A\,y\,B$ que pertenezcan a la recta t deseada. Con cualquiera de esos puntos y el vector $\vec{AB}$, podré escribir la ecuación de la recta t .

Ángulos, distancias, áreas y volúmenes en tres dimensiones

1. El coseno del ángulo formado por dos rectas es el valor absoluto del producto escalara de sendos vectores directores, partido por el producto de los módulos. Recuerda que el ángulo estará en el primer cuadrante (entre 0º y 90º).

2. Si tengo dos planos, aplico la misma fórmula pero considerando los vectores característicos de cada plano.

3. Si tengo recta y plano uso el vector director de la recta, el vector característico del plano y utilizo la misma fórmula pero con el seno del ángulo esta vez.

4. Para obtener la distancia entre dos puntos, hago el módulo del vector formado por ambos puntos. No olvides ponder el término “unidades” en las distancias.

5. La distancia de un punto a una recta se realiza repitiendo los pasos de simetría de un punto a una recta, hasta obtener el módulo del vector $\vec{AP}$, donde A es el punto de partida y P es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ buscado en los ejercicios de simetría.

6. La distancia de un punto a un plano también se puede razonar como el problema de simetría de un punto respecto a un plano, o estudiar la práctica fórmula de distancia de un punto a un plano, donde hacemos el valor absoluto de la ecuación general del plano evaluada en el punto dado, todo ello partido por la normalización $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

7. La distancia de una recta paralela a un plano se puede razonar obteniendo un punto de la recta y luego calculando la distancia de ese punto al plano, tal y como hemos indicado antes.

8. La distancia entre planos paralelos se hace cogiendo un punto de un plano y obteniendo la distancia de ese punto al otro plano. Recuerda que dos planos son paralelos si los cocientes de las componentes A, de las componentes B y de las componentes C de cada plano coinciden. Si además coinciden con el cociente de las componentes D de cada plano, serán coincidentes.

9. La distancia entre dos rectas cruzadas se puede hacer con el método de obtener recta perpendicular y secante a dos rectas cruzadas, explicado en apartados anteriores. En ese método, el módulo de los puntos obtenidos $A\, y\, B$ será la distancia entre ambas rectas. También puedo usar una fórmula, donde aparece el producto mixto y escalar:

$\frac{|\vec{AB}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}$. En la fórmula tenemos los vectores directores de la recta y el vector formado por un punto que yo elija de cada recta (no confundir con el concepto de punto arbitrario).

10. Recuerda que el producto mixto de tres vectores se calcula rápidamente poniendo cada vector en forma de fila dentro de un determinante de orden 3x3. El resultado final es un número.

11. El producto vectorial se calcula con un determinante de orden 3x3, donde en la primera fila ponemos los vectores unitarios de cada eje cartesiano, y en las otras dos filas ponemos las componentes de cada vector. El resultado final es un vector perpendicular al plano formado por los dos vectores de partida, y con sentido el dela regla de la mano derecha. Como es un vector, podré calcularle su módulo sin problemas.

12. Debo saber que el área del paralelogramo formado por la proyección de dos vectores con un vértice común es igual al módulo del producto vectorial de ambos vectores. El área del triángulo formado por el cierre de dos vectores con vértice común es un medio del área del parelelogramo explicado anteriormente. No olvidar poner “unidades cuadradas” en las áreas.

13. Las proyecciones de tres vectores con un vértice común forman un prisma, cuyo volumen es el módulo del producto mixto de los tres vectores. Si formamos un tetraedro con estos tres vectores, su volumen será un sexto del volumen del prisma. No olvidar poner “unidades cúbicas” en lso volúmenes.

14.... Y ya está. Creo que es una síntesis directa y concisa de lo fundamental de cara a Selectividad. Obviamente en Bachillerato hemos trabajado más cosas, y en Selectividad hay más detalles que aquí no hems incluido. Pero hemos conseguido un documento unficado, cuyos auidos asociados en la web www.danipartal.net rondan en total la hora de duración. Una forma útil de repasar en poco tiempo las ideas esenciales.

Ánimo y a trabajar. Ahí está el secreto de todo!!