Problemas – Tema 8

Solución a problemas sobre Determinantes - Hoja 07 - Todos resueltos

Hoja 7. Problema 1

1. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **. Calcula:**

a) $|A^{-1}|$

b) $|(5A)^{-1}|$

c) $|5A|$

a) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

$|A|=-1-1=-2 \quad \rightarrow \quad |A^{-1}|=\frac{-1}{2}$

b) $|(5A)^{-1}|=\frac{1}{|5A|}=\frac{1}{5^2\cdot|A|}=\frac{1}{25\cdot(-2)}=\frac{-1}{50}$

c) $|5A|=5^2\cdot|A|=25\cdot(-2)=-50$

Hoja 7. Problema 2

2. a) Determina el rango de $A=\begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$ **según el valor de** a **.**

b) Encontrar una matriz B **, de orden** 2×2 **, que verifique la siguiente ecuación matricial:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

a) La matriz A es de orden $n=3$. Por lo tanto su rango, como máximo, puede ser 3 . Para que $rango(A)=3$ necesitamos que su determinante sea distinto de cero. Es decir:

$$rango(A)=3 \text{ ==> } \begin{vmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{vmatrix} \neq 0$$

Antes de resolver este determinante podemos intentar hacer el mayor número de ceros posible, para simplificar la suma de producto final de la regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{vmatrix} \rightarrow \quad C'_2=C_2+C_1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ a+2 & a-3 & -10 \end{vmatrix} = 12(a-3)-4a(a-3)=4(a-3)(3-a)=-4(a-3)^2$$

Es decir, los valores de a que no anulen el determinante harán que el rango de A sea igual a 3 .

$$-4(a-3)^2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad a\neq 3$$

Nuestra discusión de casos es la siguiente:

- Si $a\neq 3 \quad \rightarrow \quad rango(A)=3$

- Si $a=3 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$ → Buscamos algún menor de orden 2 no nulo →

  Por ejemplo $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -10 \end{vmatrix}=20+20=40\neq 0 \rightarrow rango(A)=2$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow ABC=D \rightarrow B=A^{-1}DC^{-1}$

Calculamos las inversas de A y de C, siempre y cuando sus determinantes sean no nulos (condición necesaria y suficiente para existencia de matriz inversa).

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=1$$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |C|=1$$

$$C^{-1}=\frac{[adj(C)]^t}{|C|}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$B=A^{-1}DC^{-1} \rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$$

Hoja 7. Problema 3

3. Resolver la siguiente ecuación (obtener valor de x que satisface la igualdad):

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Antes de aplicar la regla de Sarrus vamos a triangular el determinante, para obtener el mayor número de ceros posibles, de tal forma que el producto final que resuelte de resolver el determinante sea lo más sencillo posible.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 - F_1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 5-x & 25-x^2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \rightarrow F'_3 = F_3 - F_1 \rightarrow$$

$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 5-x & 25-x^2 \\ 0 & 3-x & 9-x^2 \end{vmatrix} \rightarrow F'_3 = (5-x)F_3 - (3-x)F_2 \rightarrow$ Divido por $(5-x)$ para compensar la multiplicación en la fila F_3 $\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{1}{5-x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 5-x & 25-x^2 \\ 0 & 0 & (5-x)(9-x^2)-(3-x)(25-x^2) \end{vmatrix}$$

El valor de este determinante es, directamente, el producto de los términos de la diagonal principal. Es decir:

$$\frac{1}{5-x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 5-x & 25-x^2 \\ 0 & 0 & (5-x)(9-x^2)-(3-x)(25-x^2) \end{vmatrix} = [(5-x)(9-x^2)-(3-x)(25-x^2)]$$

Igualamos a 0 para resolver la ecuación que plantea el enunciado:

$$[(5-x)(9-x^2)-(3-x)(25-x^2)] = 0$$

Recordamos que suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados:

$$[(5-x)(3-x)(3+x)-(3-x)(5-x)(5+x)] = 0$$

Sacando factor común:

$$[(5-x)(3-x)(3+x)-(3-x)(5-x)(5+x)]=0$$

$$(5-x)(3-x)[-2]=0$$

Si un producto es igual a cero, significa que al menos uno de los términos de la multiplicación es igual a cero. Por lo tanto:

$$5-x=0 \quad \rightarrow \quad x=5$$

$$3-x=0 \quad \rightarrow \quad x=3$$

Hoja 7. Problema 4

4. Sea el sistema $\left\{\begin{matrix} 2x+y+az=-1 \\ -x+ay-z=2 \\ 2ax-2y+a^2z=2 \end{matrix}\right\}$

a) Discute las soluciones del siguiente sistema según los valores del parámetro a **.**

b) Resolverlo cuando sea compatible determinado.

a) Vamos a definir la matriz del sistema A y la matriz ampliada A/C , de tal forma que si el rango de ambas matrices coincide el sistema será compatible. En caso contrario, el sistema será incompatible y no tendrá solución.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{pmatrix}$ → El rango máximo que puede tener A es 3

$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & -1 \\ -1 & a & -1 & 2 \\ 2a & -2 & a^2 & 2 \end{array}\right)$ → El rango máximo que puede tener A/C es 3

El rango de A será 3 si el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por lo tanto, calculamos su determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{vmatrix}=2a^3-2a+2a-(2a^3+4-a^2)=a^2-4$$

$$|A|\neq 0 \rightarrow a^2-4\neq 0 \rightarrow a^2\neq 4 \rightarrow a\neq\pm 2$$

Nuestra discusión de casos es el siguiente:

- Si $a\neq\pm 2 \rightarrow rango(A)=3 \rightarrow rango(A/C)=3$. Como $n=3$ es el número de incógnitas del sistema, y coincide con $rango(A)=rango(A/C)$, tendremos sistema compatible determinado (solución única).
- Si $a=2 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ → Buscamos un menor de orden 2 no nulo → Por

ejemplo $|\alpha_{33}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0 \rightarrow rango(A)=2$.

Ahora debemos estudiar el rango de la matriz ampliada, ya que al añadir una columna a la matriz A , puede ocurrir que el rango de A/C sea 3 y estemos ante un sistema incompatible (sin solución).

En efecto, si en $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ tomamos la submatriz formada por la columna 2, la columna 3 y la columna 4, su determinante es no nulo.

$$|C_2 C_3 C_4|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-2-8-8-(-2+8+8)=-32\neq 0 \rightarrow rango(A/C)=3 \rightarrow$$

Al no coincidir con $rango(A)=2$ → Sistema incompatible.

- Si $a=-2 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ → Buscamos un menor de orden 2 no nulo →

Por ejemplo $|\alpha_{33}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-4+1=-3\neq 0 \rightarrow rango(A)=2$.

Ahora debemos estudiar el rango de la matriz ampliada.

$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ → Las cuatro submatrices de orden 3 contenidas dentro de la matriz ampliada A/C tienen determinante nulo. Por lo que el $rango(A/C)\neq 3 \rightarrow rango(A/C)=2$.

Otra forma de verlo es darnos cuanta de la proporcionalidad $F_3=-2F_1$ → Al existir esta combinación lineal, el rango de A/C no será 3 ya que podremos obviar una fila.

Es decir, tenemos $rango(A)=rango(A/C)=2<3(número\ incógnitas) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado (con un parámetro libre).

b) Debemos resolver el sistema en el caso S.C.D. La solución quedará en función del parámetro a .

Vamos a resolverlo aplicando la regla de Cramer.

$$\begin{Bmatrix} 2x+y+az=-1 \\ -x+ay-z=2 \\ 2ax-2y+a^2z=2 \end{Bmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{pmatrix} \rightarrow \quad |A|=a^2-4\neq 0 \quad \rightarrow \text{Por ser S.C.D. al considerar } \quad a\neq\pm 2$$

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & -1 \\ -1 & a & -1 & 2 \\ 2a & -2 & a^2 & 2 \end{array}\right)$$

Aplicamos Cramer.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{vmatrix}=2a^3-2a+2a-(2a^3+4-a^2)=a^2-4$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 2 & a & -1 \\ 2 & -2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{-a^3-2-4a-(2a^2-2+2a^2)}{a^2-4}=\frac{-a(a^2+4a+4)}{(a-2)(a+2)}=\frac{-a(a+2)^2}{(a-2)(a+2)}=\frac{-a(a+2)}{a-2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 \\ 2a & 2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{4a^2+2a-2a-(4a^2-4+a^2)}{a^2-4}=-1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 2a & -2 & 2 \end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{4a+4a-2-(-2a^2-8-2)}{a^2-4}=\frac{2a^2+8a+8}{a^2-4}=\frac{2(a+2)^2}{(a+2)(a-2)}=\frac{2(a+2)}{a-2}$$