Problemas – Tema 8

Solución a problemas sobre Determinantes - Hoja 08 - Todos resueltos

Hoja 8. Problema 1

1. a) Sea M una matriz cuadrada que cumple $|M|=-1$ y $|(-2)M|=8$. ¿Cuál es el orden de la matriz cuadrada? Justifica tu respuesta.
b) Calcula el determinante de la siguiente matriz cuadrada de orden 4.

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 10 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $|(-2)M|=(-2)^n|M|$

Donde n es la dimensión de la matriz cuadrada M . Según el enunciado del problema:

$|(-2)M|=8$ y $|M|=-1$

Por lo tanto:

$$(-2)^n|M|=8 \ \rightarrow \ (-2)^n(-1)=8 \ \rightarrow \ (-2)^n=-8 \ \rightarrow \ n=3$$

b) $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 10 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vamos a desarrollar el determinante de C por los adjuntos de una línea. Para ello, vamos dejar la fila 4 con un único término distinto de cero.

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 10 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ C'_3=C_3-C_2 \ \rightarrow \ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la fila 4:

$$|C|=0\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+0\cdot A_{43}+0\cdot A_{44}=A_{42}=(-1)^{6}\cdot|\alpha_{42}|=|\alpha_{42}|$$

El determinante de C se reduce al cálculo de un menor de orden 3.

$$|\alpha_{42}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 3\\ 1 & 8 & 11\end{vmatrix}=0+3+32-(0+24-22)=35-2=33$$

Hoja 8. Problema 2

2. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ **y sabemos que** $|A|=2$ **. Calcula los siguientes determinantes, explicando adecuadamente los pasos que sigues para calcularlos:**

a) $\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

a) Aplicamos transformaciones lineales de filas y columnas hasta obtener el determinante de la matriz A y así poder aplicar el valor de $|A|=2$.

$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ $\rightarrow$ Intercambiamos F_1 con F_3 con el consiguiente cambio de signo $\rightarrow$ $-\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \end{vmatrix}$ $\rightarrow$ Intercambiamos F_2 con F_3 lo cual genera un nuevo cambio de signo$\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \end{vmatrix}$ $\rightarrow$ Sacamos factor común 5 de la primera fila $\rightarrow$ $5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \end{vmatrix}$ $\rightarrow$ $F'_2=F_2+F_1$, $F'_3=F_3+F_1$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=5|A|=5\cdot 2=10$

b) Desarrollamos los cuadrados de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+1 & b^2+2b+1 & c^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \rightarrow \quad F'_1 = F_1 - 2\mathrm{F}_2 - F_3 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = |A| = 2$$

Hoja 8. Problema 3

3. Sea $A=\begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ **.**

a) ¿Para qué valores de a **existe la inversa de** A **?**

b) Hallar el valor de a **para que se cumpla** $A^{-1}=\frac{1}{4}A$

a) La matriz A de orden $n=3$ posee inversa si su determinante es no nulo. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=-2a^2+0+0-(0+0+0)=-2a^2\neq 0$$

Por lo tanto, si $a\neq 0$ $\rightarrow$ $|A|\neq 0$ $\rightarrow$ Existe inversa de A .

b) Calculamos la inversa de A .

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -2a & 2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -a & -2a \end{pmatrix}}{-2a^2}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

E igualamos la inversa a $\frac{1}{4}A$.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{4} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{a}{4} \end{pmatrix}$$

Igualamos cada uno de los coeficientes de ambas matrices para obtener las condiciones que debe cumplir a .

- Coeficientes $a_{11} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{a}{4} \rightarrow a = \pm 2$
- Coeficientes $a_{12} \rightarrow \frac{-1}{a} = \frac{-1}{2} \rightarrow a = 2$
- Coeficientes $a_{32} \rightarrow \frac{1}{2a} = \frac{1}{4} \rightarrow a = 2$
- Coeficientes $a_{33} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{a}{4} \rightarrow a = \pm 2$

Por lo tanto las cuatro condiciones se cumplen siempre que $a = 2$.

Hoja 8. Problema 4

4. Sea el sistema $\begin{Bmatrix} 2x+y+az=-1 \\ -x+ay-z=2 \\ 2ax-2y+a^2z=2 \end{Bmatrix}$

a) Discute las soluciones del siguiente sistema según los valores del parámetro a **.**

b) Resolverlo cuando sea compatible determinado.

a) Vamos a definir la matriz del sistema A y la matriz ampliada A/C , de tal forma que si el rango de ambas matrices coincide el sistema será compatible. En caso contrario, el sistema será incompatible y no tendrá solución.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{pmatrix}$ → El rango máximo que puede tener A es 3

$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & -1 \\ -1 & a & -1 & 2 \\ 2a & -2 & a^2 & 2 \end{array}\right)$ → El rango máximo que puede tener A/C es 3

El rango de A será 3 si el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por lo tanto, calculamos su determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{vmatrix}=2a^3-2a+2a-(2a^3+4-a^2)=a^2-4$$

$$|A|\neq 0 \;\rightarrow\; a^2-4\neq 0 \;\rightarrow\; a^2\neq 4 \;\rightarrow\; a\neq\pm 2$$

Nuestra discusión de casos es el siguiente:

- Si $a\neq\pm 2 \rightarrow rango(A)=3 \rightarrow rango(A/C)=3$. Como $n=3$ es el número de incógnitas del sistema, y coincide con $rango(A)=rango(A/C)$, tendremos sistema compatible determinado (solución única).

- Si $a=2 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ → Buscamos un menor de orden 2 no nulo → Por ejemplo $|\alpha_{33}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0 \rightarrow rango(A)=2$.

  Ahora debemos estudiar el rango de la matriz ampliada, ya que al añadir una columna a la matriz A , puede ocurrir que el rango de A/C sea 3 y estemos ante un sistema incompatible (sin solución).

  En efecto, si en $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ tomamos la submatriz formada por la columna 2, la columna 3 y la columna 4, su determinante es no nulo.

  $$|C_2 C_3 C_4|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-2-8-8-(-2+8+8)=-32\neq 0 \rightarrow rango(A/C)=3 \rightarrow$$

  Al no coincidir con $rango(A)=2$ → Sistema incompatible.

- Si $a=-2 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ → Buscamos un menor de orden 2 no nulo → Por ejemplo $|\alpha_{33}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-4+1=-3\neq 0 \rightarrow rango(A)=2$.

  Ahora debemos estudiar el rango de la matriz ampliada.

  $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ → Las cuatro submatrices de orden 3 contenidas dentro de la matriz ampliada A/C tienen determinante nulo. Por lo que el $rango(A/C)\neq 3 \rightarrow rango(A/C)=2$.

  Otra forma de verlo es darnos cuanta de la proporcionalidad $F_3=-2F_1$ → Al existir esta combinación lineal, el rango de A/C no será 3 ya que podremos obviar una fila.

  Es decir, tenemos $rango(A)=rango(A/C)=2<3(número\ incógnitas) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado (con un parámetro libre).

b) Debemos resolver el sistema en el caso S.C.D. La solución quedará en función del parámetro a .

Vamos a resolverlo aplicando la regla de Cramer.

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x+y+az=-1 \\ -x+ay-z=2 \\ 2ax-2y+a^2 z=2 \end{array} \right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{pmatrix} \rightarrow \quad |A|=a^2-4\neq 0 \quad \rightarrow \text{Por ser S.C.D. al considerar } \quad a\neq\pm 2$$

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & -1 \\ -1 & a & -1 & 2 \\ 2a & -2 & a^2 & 2 \end{array}\right)$$

Aplicamos Cramer.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{vmatrix}=2a^3-2a+2a-(2a^3+4-a^2)=a^2-4$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 2 & a & -1 \\ 2 & -2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{-a^3-2-4a-(2a^2-2+2a^2)}{a^2-4}=\frac{-a(a^2+4a+4)}{(a-2)(a+2)}=\frac{-a(a+2)^2}{(a-2)(a+2)}=\frac{-a(a+2)}{a-2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 \\ 2a & 2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{4a^2+2a-2a-(4a^2-4+a^2)}{a^2-4}=-1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 2a & -2 & 2 \end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{4a+4a-2-(-2a^2-8-2)}{a^2-4}=\frac{2a^2+8a+8}{a^2-4}=\frac{2(a+2)^2}{(a+2)(a-2)}=\frac{2(a+2)}{a-2}$$