Teoría – Tema 8

Determinante de una matriz cuadrada de orden 1, 2 y 3

Índice de contenido

¿Qué es un determinante de una matriz cuadrada y que aplicación tendrá?

Un determinante es un número real asociado a una matriz cuadrada. Sin más, no vamos a entrar en más definiciones.

Como empecemos a definir el determinante como la suma de productos de permutaciones concretas de los coeficientes de la matriz... podemos tardar más tiempo que los políticos españoles en elegir presidente del gobierno tras las elecciones del 20 de diciembre de 2015. Y al final acabaríamos con la cabeza como un bombo, y con una aplicación práctica muy limitada.

Por lo tanto, con saber que un **determinante** siempre es **un número real** y que solo puede obtenerse de **matrices cuadradas**, hemos cumplido.

¿Cómo se denota?

El determinante de una matriz A se escribe $|A|$ o bien $det(A)$. Al gusto del consumidor.

¿Por qué estudiarlos?

Para obtener un método más eficiente (y menos tedioso) que el matricial (estudiado en los temas anteriores) para estudiar la existencia de solución en sistemas de ecuaciones, para estudiar rango de matrices y para obtener matrices inversas.

Por ejemplo: veremos que si el determinante de una matriz cuadrada es igual a 0, la matriz no admite inversa... así de rápido y así de sencillo. Los determinantes nos alegrarán un poco nuestra vida matemática.

Pues, allá vamos!!

Determinante de una matriz de orden 1

Una matriz cuadrada de orden uno es una matriz de una fila y una columna. Por lo tanto, con un único coeficiente.

$$A=(a_{11})$$

¿Cuánto vale el determinante de una matriz de orden 1? Coincide con el valor del único coeficiente de la matriz. Nos hemos “partío el pecho”, ¿eh?

$$A=(2) \quad \rightarrow \quad |A|=2$$

$$B=(0) \quad \rightarrow \quad |B|=0$$

$$C=\left(\frac{-1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad |C|=\frac{-1}{2}$$

Determinante de una matriz de orden 2

El determinante de una matriz de orden 2 es un "pelín" más complicado que el de orden 1, pero tampoco es una cosa tremendamente compleja.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \quad |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

Es decir, el determinante de una matriz cuadrada de orden 2 es el producto de los términos de la diagonal principal menos el producto de los términos de la diagona secundaria.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \quad |A|=2\cdot 4-[(-1)\cdot 3]=8+3=11$$

Determinante de una matriz de orden 3. Regla de Sarrus.

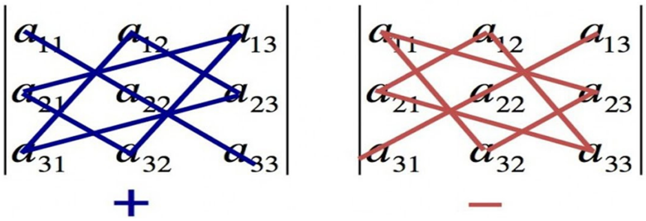
En una matriz cuadrada de orden 3, el determinante está compuesto por una suma de 6 términos que se conoce como regla de Sarrus.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}+a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}+a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33})$$

La cosa ya se fastida un poco para aprenderlo de memoria, ¿verdad?

Menos mal que tenemos una imagen pnemotécnica que nos ayuda a recordar esa expresión.



Dibujamos triángulos cuyos vértices coincidan con los coeficientes de la matriz.

Cada triángulo que contenga un lado “paralelo” a la diagonal principal genera un término que suma en el producto de la regla de Sarrus.

Cada triángulo que posea un lado “paralelo” a la diagonal secundaria genera un término que resta en el producto de la regla de Sarrus.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0+0-12-(-6+2+0)=-12+4=-8$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |B|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-4+0+0-(0+0-4=0)$$