Teoría – Tema 8

Ejemplos de aplicación de propiedades

Índice de contenido

Ejemplos resueltos...2

Ejemplos resueltos

1. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}=25$, obtener $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \end{vmatrix}=2^3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}=8\cdot 25=200$$

2. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=5$, obtener $\begin{vmatrix} \frac{a}{3}+2b & 4b & 6c+a \\ \frac{d}{3}+2e & 4e & 6f+d \\ \frac{g}{3}+2h & 4h & 6i+g \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{3}+2b & 4b & 6c+a \\ \frac{d}{3}+2e & 4e & 6f+d \\ \frac{g}{3}+2h & 4h & 6i+g \end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} \frac{a}{3}+2b & b & 6c+a \\ \frac{d}{3}+2e & e & 6f+d \\ \frac{g}{3}+2h & h & 6i+g \end{vmatrix} \rightarrow C_1'=C_1-2C_2 \rightarrow 4\cdot\begin{vmatrix} \frac{a}{3} & b & 6c+a \\ \frac{d}{3} & e & 6f+d \\ \frac{g}{3} & h & 6i+g \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{4}{3}\cdot\begin{vmatrix} a & b & 6c+a \\ d & e & 6f+d \\ g & h & 6i+g \end{vmatrix} \rightarrow C_3'=C_3-C_1 \rightarrow \frac{4}{3}\cdot\begin{vmatrix} a & b & 6c \\ d & e & 6f \\ g & h & 6i \end{vmatrix}=\frac{6\cdot 4}{3}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\frac{24}{3}\cdot 5=40$$

3. ¿Para qué valores de a no existe A^{-1} ?

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ a & 1 & -a \end{pmatrix} \rightarrow |A|=-a^2+0+0-(-a^2+3+0)=-3$$

Como $|A|=-3\neq 0$ $\rightarrow$ siempre existe $A^{-1}\,\forall a\in\mathbb{R}$

4. Sea $A \in M_{4\times 4}$. Si $|A|=2$, obtener $|3A^{-1}|$ y $|(3A)^{-1}|$.

$$|3A^{-1}|=3^4\cdot|A^{-1}|=81\cdot\frac{1}{|A|}=81\cdot\frac{1}{2}=\frac{81}{2}$$

$$|(3A)^{-1}|=\frac{1}{|3A|}=\frac{1}{3^4\cdot|A|}=\frac{1}{81\cdot 2}=\frac{1}{162}$$

5. ¿Para qué valores de a existe A^{-1}?

$$A=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow |A|=a^2-3a-12$$

Si $|A|\neq 0 \rightarrow \exists A^{-1} \rightarrow a^2-3a-12\neq 0 \rightarrow \forall a\in\mathbb{R}-\{\frac{3\pm\sqrt{57}}{2}\}$

6. ¿Para qué valores de a no existe A^{-1}?

$$A=\begin{pmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ 5a-4 & a+1 & 3a-4 \end{pmatrix}$$

Si aplicamos Sarrus directamente, las operacione son largas. Puede ser buena idea hacer ceros en algunos de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ 5a-4 & a+1 & 3a-4 \end{vmatrix} \rightarrow F_3{}'=F_3-F_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ a-3 & 0 & a-3 \end{vmatrix} \rightarrow C_3{}'=C_3-C_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 2a+2 & 3 & -a-2 \\ 4a-1 & a+1 & -2a \\ a-3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0+0-6a(a-3)-((-a-2)(a+1)(a-3))$$

$$|A|=(a-3)(a^2-3a+2)$$

Si $|A|=0 \rightarrow \nexists A^{-1} \rightarrow (a-3)(a^2-3a+2)=0 \rightarrow a=1, a=2, a=3$

7. Resuelve $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -3x \\ 2x & 6x & 3 \end{vmatrix} = -24$

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -3x \\ 2x & 6x & 3 \end{vmatrix} \rightarrow C_2{}' = C_2 - 2C_1 \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3x \\ 2x & 2x & 3 \end{vmatrix} = -24$$

$$-12+0+0-(0+0+12x^2 = -24) \rightarrow x = \pm 1$$

8. Calcula sin desarrollar el determinante.

$$|B| = \begin{vmatrix} a & a & 2a & a+c \\ a^2 & b & a^2+b & 2b \\ b & c & b+c & c \\ c & c & 2c & 1 \end{vmatrix} \rightarrow C_3{}' = C_3 - C_2 \rightarrow \begin{vmatrix} a & a & a & a+c \\ a^2 & b & a^2 & 2b \\ b & c & b & c \\ c & c & c & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Como } C_1 = C_3 \rightarrow$$

$\rightarrow \quad |B| = 0$

9. Calcula sin desarrollar el determinante.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1+b & 1 & b \\ 2+c & 2 & c \\ 3+a & 3 & a \end{vmatrix} \rightarrow \text{Como } C_1 = C_2 + C_3 \rightarrow |D| = 0$$

10. ¿Para qué valores de x existe A^{-1} ?

$$A = \begin{pmatrix} sen(x) & -\cos(x) & 0 \\ \cos(x) & sen(x) & 0 \\ sen(x)+\cos(x) & sen(x)-\cos(x) & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = sen^2(x)+0+0-(0+0-\cos^2(x))$$

$$|A| = sen^2(x)+\cos^2(x)$$

Si $|A|=0 \rightarrow \nexists A^{-1} \rightarrow sen^2(x)+\cos^2(x)=0$ → Absurdo $1=0$ → Por lo tanto, existe inversa $\forall x \in \mathbb{R}$.

11. Resuelve $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; F_2' = F_2 - F_1 \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 5-x & 25-x^2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; F_3' = F_3 - F_1 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 5-x & 25-x^2 \\ 0 & 3-x & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; F_3' = (5-x)F_3 - (3-x)F_2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \frac{1}{5-x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 5-x & 25-x^2 \\ 0 & 0 & (5-x)(9-x^2)-(3-x)(25-x^2) \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \frac{1}{5-x}(5-x)[(5-x)(9-x^2)-(3-x)(25-x^2)] = 0 \;\rightarrow\; (5-x)(3-x)[(3+x)-(5+x)] = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; (5-x)(3-x)[-2] = 0 \;\rightarrow\; x = 3 \,,\, x = 5$$