Teoría – Tema 8

Regla de Cramer

Índice de contenido

Regla de Cramer para Sistemas Compatibles Determinados

Esta regla nos permite, mediante determinantes, obtener la solución única de los sistemas compatibles determinados (SCD).

Además, en los sistemas compatibles indeterminados (SCI), veremos facilmente como reducir su estudio a un SCD de menor dimensión.

Sea el siguiente sistema de ecuaciones 3×3 (la demostración vale para cualquier dimensión).

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=c_3 \end{cases} \rightarrow \quad AX=C \quad \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Si existe $A^{-1} \rightarrow X=A^{-1}C$

Sabemos que $A^{-1}=\dfrac{[adj(A)]^t}{|A|} \rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ (hemos aplicado traspuesta)

Si $X=A^{-1}C \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Igualamos componente a componente.

$$x\equiv x_1=\frac{A_{11}c_1+A_{21}c_2+A_{31}c_3}{|A|}$$

$$y\equiv x_2=\frac{A_{12}c_1+A_{22}c_2+A_{32}c_3}{|A|}$$

$$z\equiv x_3=\frac{A_{13}c_1+A_{23}c_2+A_{33}c_3}{|A|}$$

Y ahora viene la idea feliz... gente lista que hay por el mundo y por la historia.

Por ejemplo, en x_1 , Cramer se dio cuenta que por la definición de adjunto:

$$A_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} \quad , \quad A_{21}=a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33} \quad , \quad A_{31}=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{32}$$

$$A_{11}c_1+A_{21}c_2+A_{31}c_3=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Este determinante coincide con la forma de $|A|$ (recuerda que partimos de un sistema $AX=C$) si cambiamos la primera columna por la columna de términos independientes del sistema. Por lo tanto, la primera incógnita resulta:

$$x\equiv x_1=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Análogamente para el resto de incógnitas.

$$y\equiv x_2=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$z\equiv x_3=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

En general, para la incógnita x_i en una sistema $n\times n$ tendremos:

$$x_i=\frac{A_{1i}c_1+A_{2i}c_2+A_{3i}c_3+...+A_{ni}c_n}{|A|} \quad \rightarrow \quad x_i=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & c_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & c_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & c_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplos

1. Resolver $\left\{\begin{matrix} x-y+z=1 \\ 4x+2y-2z=4 \\ 3x-3y-3z=-9 \end{matrix}\right\}$

$$A\,X=C \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}=-6+6-12-(6+6+12)=-36\neq 0 \;\rightarrow\; \exists A^{-1}$$ $\rightarrow$ Podemos aplicar Cramer

$$x=\frac{1}{-36}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -9 & -3 & -3 \end{vmatrix}=\frac{1}{-36}\cdot[-6-18-12-(-18+6+12)]=\frac{-36}{-36}=1$$

$$y=\frac{1}{-36}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 3 & -9 & -3 \end{vmatrix}=\frac{1}{-36}\cdot[-12-6-36-(12+18-12)]=\frac{-72}{-36}=2$$

$$z=\frac{1}{-36}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -9 \end{vmatrix}=\frac{1}{-36}\cdot[-18-12-12-(6-12+36)]=\frac{-72}{-36}=2$$

Solución única: $x=1\,,y=2\,,z=2$ $\rightarrow$ SCD

2. Resolver $\left\{\begin{matrix} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z=0 \end{matrix}\right\}$

$$A\,X=C \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1-2-(-1-1+2) = -2 \neq 0 \;\rightarrow\; \exists A^{-1}$$ → Podemos aplicar Cramer

$$x = \frac{1}{-2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot [-2+0-2-(0-2+2)] = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{1}{-2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot [2+2+0-(2+0+4)] = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$z = \frac{1}{-2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot [0+2-4-(-2-2+0)] = \frac{2}{-2} = -1$$

Solución única: $x=2,\, y=1,\, z=-1$ → SCD

3. ¿Puedo aplicar Cramer a un Sistema Compatible Indeterminado?

Sí, siempre que reduzca el sistema a uno de menor dimensión que sea compatible determinado. Veamos un ejemplo.

Nos dan el siguiente sistema $\left\{\begin{matrix} x+y+z-t=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z+t=1 \end{matrix}\right\}$ y nos dicen que es SCI con un grado de libertad (más adelante, aprenderemos a aplicar determinantes para saber si el sistema es SCD, SCI o SI).

Con esos datos de enunciado, sabemos que una incógnita será un parámetro libre. Por ejemplo $t=\lambda$. Reescribo mi sistema considerando este parámetro libre, que pasará a formar parte de los términos independientes.

$$\left\{\begin{matrix} x+y+z=1+\lambda \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z=1-\lambda \end{matrix}\right\}$$

$$A\,X=C \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 2 \\ 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1+1-2-(-1-1+2)=-2\neq 0 \;\rightarrow\; \exists A^{-1} \;\rightarrow \text{Podemos aplicar Cramer}$$

$$x=\frac{1}{-2}\cdot\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1-\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{-2}\cdot[-2-\lambda]=1+\lambda$$

$$y=\frac{1}{-2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{-2}\cdot[-2\lambda]=\lambda$$

$$z=\frac{1}{-2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\frac{1}{-2}\cdot[2\lambda]=-\lambda$$

Infinitas soluciones: $x=1+\lambda\,,\, y=\lambda\,,\, z=-\lambda\,,\, t=\lambda$ $\rightarrow$ SCI