Problemas – Tema 9

Solución a problemas sobre Geometría - Hoja 01 - Problemas 1, 2, 5

Hoja 1. Problema 1

Dada la recta $r:\begin{cases} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{cases}$ **y el plano** $\Pi: 2x-y+az=0$ **.**

a) Calcular a **para que la recta y el plano sean paralelos.**

b) Obtener un plano perpendicular a la recta que pase por el origen de coordenadas.

a) Una recta y un plano son paralelos si el sistema formado por las dos ecuaciones generales de la recta y por la ecuación general del plano no tiene solución (ausencia de puntos de corte). La notación matricial de ese sistema será:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & a & 0 \end{array}\right) \rightarrow \ det(A)=-8a-6-12-(-16-4-9a) \rightarrow \ det(A)=a+2$$

Si $det(A)=0 \rightarrow a=-2$

Discusión de casos:

- Si $a\neq-2 \rightarrow det(A)\neq0 \rightarrow Rango(A)=3=Rango(A/C)=n^o\,incógnitas \rightarrow$ Por el Teorema de Rouché Frobenius tendremos SCD con solución única.
- Si $a=-2 \rightarrow det(A)=0 \rightarrow Rango(A)\neq3$ → Buscamos un menor de orden 2 no nulo → $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-8+9=1\neq0 \rightarrow Rango(A)=2$ → Estudiamos el rango de la matriz ampliada → Buscamos un menor de orden 3 no nulo en la ampliada → $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0+12-4-(1+0-18)=25\neq0 \rightarrow Rango(A/C)=3$ → Al no coincidir el rango de la matriz del sistema y el rango de la matriz ampliada tendremos SI sin solución → Recta y plano son paralelos.

b) Un plano perpendicular a una recta tendrá, como vector normal, el vector director de la recta. Por lo tanto, si pasamos la ecuación general de la recta a paramétrica, obtendremos su vector director.

$$r:\begin{Bmatrix} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{Bmatrix} \rightarrow \quad z=\lambda \quad \rightarrow \begin{Bmatrix} 4x-3y=-1-4\lambda \\ 3x-2y=-3-\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} -12x+9y=3+12\lambda \\ 12x-8y=-12-4\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow$$

Sumamos ambas ecuaciones → $y=-9+8\lambda$ → Llevando este resultado a la primera ecuación del sistema → $4x-3(-9+8\lambda)=-1-4\lambda$ → $4x+27-24\lambda=-1-4\lambda$ → $4x=-28+20\lambda$ → $x=-7+5\lambda$

La ecuación paramétrica queda → $r:\begin{Bmatrix} x=-7+5\lambda \\ y=-9+8\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$ → Vector director $\vec{u}_r=(5,8,1)$

Este vector director será el vector normal del plano, por ser el plano perpendicular a la recta. Por lo tanto la ecuación general del plano resulta:

$$\Pi: 5x+8y+z+D=0$$

Si el plano pasa por el origen de coordenadas $(0,0,0)$ → $D=0$ → $\Pi: 5x+8y+z=0$

Hoja 1. Problema 2

2. Calcular las coordenadas de un punto de la recta $r: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ **que equidiste de los planos** $\Pi_1: 3x+4y-1=0$ **y** $\Pi_2: 4x-3y+9=0$ **.**

Debemos obtener la distancia de un punto arbitrario de la recta a cada uno de los planos e igualar ambas distancias. Es decir.

$$r: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2} \rightarrow r: \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases} \rightarrow \text{Punto arbitrario } P(2+2\lambda, -1+3\lambda, 2+2\lambda)$$

La distancia de ese punto arbitrario al primer plano será:

$$d(P, \Pi_1)=\frac{|3(2+2\lambda)+4(-1+3\lambda)+0-1|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}}=\frac{|1+18\lambda|}{5}$$

La distancia del punto arbitrario al segundo plano será:

$$d(P, \Pi_2)=\frac{|4(2+2\lambda)-3(-1+3\lambda)+0+9|}{\sqrt{4^2+3^2+0^2}}=\frac{|20-\lambda|}{5}$$

Igualamos → $\frac{|1+18\lambda|}{5}=\frac{|20-\lambda|}{5}$ → Al igualar dos valores absolutos debemos considerar la opción positiva (ambos argumentos postivos o negativos) y la opción negativa (un argumento positivo y el otro negativo). Es decir:

$$1+18\lambda=20-\lambda \rightarrow \lambda=1 \rightarrow P(4,2,4)$$

$$-1-18\lambda=20-\lambda \rightarrow -17\lambda=21 \rightarrow \lambda=\frac{-21}{17} \rightarrow P\left(\frac{-8}{17}, \frac{-80}{17}, \frac{-8}{17}\right)$$

Hoja 1. Problema 3

3. a) Encuentra la ecuación continua de la recta r **que pasa por el punto** $P(2,3,-1)$ **y es paralela a los planos** $\Pi_1: 2x-y+3z-1=0$ **y** $\Pi_2: x+y-2z+3=0$ **.**

b) Encuentra el punto $Q\in r$ **que está en el plano** $x=0$ **.**

Hoja 1. Problema 4

4. Encuentra la ecuación continua de la recta r **que pasa por el punto** $P(-1,5,6)$ **y corta a las rectas** $s:\begin{Bmatrix} x+y+z+1=0 \\ 3x+y-z-8=0 \end{Bmatrix}$ **y** $t:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$ **.**

Hoja 1. Problema 5

5. a) Para qué valor del parámetro a la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{matrix}\right\}$ es perpendicular al plano $\Pi: -6x+ay+2z=0$.

b) Demuestre que si $a=-8$ la recta r corta al plano Π en un punto. Calcular dicho punto de corte.

a) La recta es perpendicular al plano si el vector director de la recta es proporcional al vector normal del plano.

$r:\left\{\begin{matrix} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{matrix}\right\}$ → $z=\lambda$ → $\left\{\begin{matrix} x+y=1-\lambda \\ -x-2y=-\lambda \end{matrix}\right\}$ → Sumamos → $-y=1-2\lambda$ → $y=-1+2\lambda$ → Sustituyendo en la primera ecuación del sistema → $x+(-1+2\lambda)=1-\lambda$ → $x=2-3\lambda$

La ecuación paramétrica de la recta resulta → $r:\left\{\begin{matrix} x=2-3\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$ → Vector director $\vec{u}_r=(-3,2,1)$

El vector normal del plano $\Pi: -6x+ay+2z=0$ es → $\vec{u}_\Pi=(-6,a,2)$

Ambos vectores son proporcionales si se cumplen las siguientes igualdades resultantes de dividir sus respectivas componentes:

$$\frac{-3}{-6}=\frac{2}{a}=\frac{1}{2} \rightarrow a=4$$

b) Si $a=-8$ el plano será $\Pi: -6x-8y+2z=0$ → Llevamos a la ecuación general del plano las coordenadas paramétricas de la recta. Si podemos despejar el parámetro libre de forma única, significará que recta y plano se cortan en un punto.

$$-6(2-3\lambda)-8(-1+2\lambda)+2(\lambda)=0 \rightarrow -12+18\lambda+8-16\lambda+2\lambda=0$$

$-4+4\lambda=0 \rightarrow \lambda=1$ → Punto de corte $P(2-3,-1+2,1)=(-1,1,1)$

Hoja 1. Problema 6

6. Dos de los tres vértices de un triángulo son los puntos $A(1,1,1)$ **y** $B(1,1,3)$ **. El tercer vértice** C **está en la recta** r **que pasa por los puntos** $P(-1,0,2)$ **y** $Q(0,0,2)$ **.**

a) Determinar la ecuación de la recta r **.**

b) Calcular el punto C **para que el área del triángulo sea igual a** $\sqrt{15}\,u^2$ **.**