Problemas – Tema 9

Solución a problemas sobre Geometría - Hoja 02 - Problemas 1, 4

Hoja 2. Problema 1

1. Dados el plano $\Pi: 2x-y=2$ **y la recta** $r:\left\{\begin{matrix} x=1 \\ y-2z=2 \end{matrix}\right\}$ **se pide:**

a) Estudiar la posición relativa de la recta y el plano.

b) Determinar el plano que contiene a la recta r **y es perpendicular a** Π **.**

c) Determinar la recta que pasa por $A(-2,1,0)$ **, corta a** r **y es paralela a** Π **.**

a) Estudiamos la solución del sistema formado por la ecuación general del plano y las dos ecuaciones generales de la recta.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$ → Vamos a aplicar Gauss por encima de la diagonal principal

$C_1 \leftrightarrow C_2$ (al intercambiar columnas, cambian la posición de las incógnitas) → $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$ →

$F_1{}'=F_1-2F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$ → De $F_1 \rightarrow -y=0 \rightarrow y=0$

De $F_2 \rightarrow x=1$

De $F_3 \rightarrow 0-2z=2 \rightarrow z=-1$

Al tener el sistema solución única, recta y plano son secantes y se cortan en el punto $P(1,0,-1)$.

b) Buscamos un plano que contenga a r y sea perpendicular a Π .

Si contiene a r , el vector director de la recta es paralelo al plano que buscamos. Si es perpendicular a Π , el vector normal a Π es paralelo al plano que buscamos.

Calculemos ambos vectores.

Si pasamos la ecuación general de la recta a paramétrica, podremos obtener un vector director.

$$r:\begin{Bmatrix} x=1 \\ y-2z=2 \end{Bmatrix} \rightarrow z=a \rightarrow r:\begin{Bmatrix} x=1 \\ y=2+2a \\ z=a \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{u}_r=(0,2,1)$$

De la ecuación general del plano obtenemos su vector normal.

$$\Pi:2x-y=2 \rightarrow \vec{u_\Pi}=(2,-1,0)$$

Comprobamos que $\vec{u}_r=(0,2,1)$ y $\vec{u_\Pi}=(2,-1,0)$ no son proporcionales, ya que el cociente de sus componentes no lo son → $\frac{0}{2}\neq\frac{2}{-1}\neq\frac{1}{0}$

El punto $P(1,0,-1)$ obtenido en el apartado a) pertenecerá al plano que estamos buscando (al contener el plano a la recta).

Con dos vectores linealmente independientes y un punto del plano, podemos escribir la ecuación paramétrica del plano.

$$\Pi:\begin{Bmatrix} x=1+2b \\ y=2a-b \\ z=-1+a \end{Bmatrix}$$

c) Debemos determinar la recta que pasa por $A(-2,1,0)$, corta a r y es paralela a Π . Llamaremos a la recta solución s .

Si s es paralela a Π , significa que el vector director de s es perpendicular al vector normal de Π , por lo que $\vec{u}_s\cdot\vec{u}_\Pi=0$.

Como razonamos en el apartado b) $\vec{u_\Pi}=(2,-1,0)$.

El vector director de s será el vector $\vec{AB}$, donde $A(-2,1,0)$ y B es un punto arbitrario de la recta r , ya que ambas rectas se cortan según el enunciado. Por lo tanto, de la ecuación paramétrica de r podemos sacar un punto arbitrario:

$$r:\begin{Bmatrix} x=1 \\ y=2+2a \\ z=a \end{Bmatrix} \rightarrow B=(1,2+2a,a) \rightarrow \vec{AB}=(3,1+2a,a) \rightarrow \vec{u}_s=\vec{AB}=(3,1+2a,a)$$

$$\vec{u}_s\cdot\vec{u}_\Pi=0 \rightarrow (3,1+2a,a)\cdot(2,-1,0)=0 \rightarrow 6-1-2a=0 \rightarrow a=\frac{5}{2} \rightarrow \vec{u}_s=(3,6,\frac{5}{2})$$

Si el vector director es $\vec{u}_s=(3,6,\frac{5}{2})$ y la recta pasa por $A(-2,1,0)$, su ecuación paramétrica resulta:

$$s:\left\{\begin{matrix} x=-2+3\lambda \\ y=1+6\lambda \\ z=\frac{5}{2}\lambda \end{matrix}\right\}$$

Hoja 2. Problema 4

4. Consideremos los puntos $A(2,6,-3)$ **y** $B(3,3,-2)$ **.**

a) Halla la ecuación de la recta que contiene a ambos puntos.

b) Determina una ecuación para el plano equidistante de ambos puntos.

a) Para escribir la ecuación de una recta necesitamos un vector director de la recta y un punto de la recta.

El vector $\vec{AB}=(1,-3,1)$ es paralelo a la recta, que además pasa por el punto $A(2,6,-3)$. Por lo tanto, la ecuación paramétrica resulta:

$$r:\left\{\begin{matrix} x=2+a \\ y=6-3a \\ z=-3+a \end{matrix}\right\}$$

b) El plano equidistante de ambos puntos pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Ese punto medio será: $C=(\frac{2+3}{2},\frac{6+3}{2},\frac{-3-2}{2})=(\frac{5}{2},\frac{9}{2},-\frac{5}{2})$.

El vector $\vec{AB}=(1,-3,1)$ es perpendicular al plano solución. Y con un vector perpendicular al plano y un punto del plano podemos escribir su ecuación general $Ax+By+Cz+D=0$.

$$\Pi: x-3y+z+D=0$$

El término independiente lo sacamos sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del plano.

$$\frac{5}{2}-3\cdot\frac{9}{2}-\frac{5}{2}+D=0 \rightarrow D=\frac{27}{2} \rightarrow \Pi: x-3y+z+\frac{27}{2}=0$$