Problemas – Tema 9

Solución a problemas sobre Geometría - Hoja 03 - Problemas 2, 3

Hoja 3. Problema 2

2. Define el producto vectorial de dos vectores. Dados los vectores $\vec{u}=(2,2,0)$ y $\vec{v}=(1,1,-1)$, calcula los vectores unitarios y perpendiculares a los dos vectores.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denota como $\vec{u}\times\vec{v}$ y es un nuevo vector, con dirección perpendicular al plano formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sentido el marcado por la regla de la mano derecha y módulo igual a:

$$\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\alpha)$$

Siendo α el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Obtengamos los vectores unitarios de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Si $\vec{u}=(2,2,0)$ $\rightarrow$ $\vec{u}=\sqrt{2^2+2^2+0}=\sqrt{8}$ $\rightarrow$ vector unitario $\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(\frac{2}{\sqrt{8}},\frac{2}{\sqrt{8}},0)$

Si $\vec{v}=(1,1,-1)$ $\rightarrow$ $\vec{v}=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$ $\rightarrow$ vector unitario $\hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$

Un vector perpendicular a ambos vectores lo obtenemos del producto vectorial, pudiendo aplicar la siguiente regla nemotécnica:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2\,\hat{i}+0+2\,\hat{k}-(2\,\hat{k}+0-2\,\hat{j})=-2\,\hat{i}+2\,\hat{j}=(-2,2,0)$$

Hoja 3. Problema 3

3. Calcula el valor de a para que la recta $r: \frac{x}{2}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-2}{-4}$ no corte al plano $\Pi: 5x+ay+4z=5$. Para ese valor de a calcula la distancia de la recta al plano.

Una recta y un plano no se cortan si el sistema formado por ambas ecuaciones no tiene solución.

Podemos resolver este problema de dos maneras.

La primera es pasar la ecuación de la recta a general y realizar un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas con la ecuación general del plano. Si el sistema no tiene solución, significa que recta y plano no se cortan.

La segunda es pasar la recta a paramétrica y sustituir en la ecuación del plano, quedando una ecuación con incógnita única el parámetro libre de la recta. Si llegamos a un absurdo, significará que recta y plano nos e cortan.

Resolvamos el ejercicios por este segundo método.

$$r: \frac{x}{2}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-2}{-4} \quad \rightarrow \quad r: \begin{cases} x=2t \\ y=2+6t \\ z=2-4t \end{cases} \rightarrow \text{Sustituimos en} \quad \Pi: 5x+ay+4z=5$$

$$5(2t)+a(2+6t)+4(2-4t)=5 \quad \rightarrow \quad 10t+2a+6at+8-16t-5=0$$

$$6at-6t+2a+3=0 \quad \rightarrow \quad (6a-6)t=-2a-3 \quad \rightarrow \quad t=\frac{-2a-3}{6a-6}$$

Podremos obtener un valor del parámetro t siempre que el denominador sea distinto de cero, en cuyo cayo tendríamos un absurdo matemático y no habría solución (por lo que recta y plano no se cortarían).

$$6a-6=0 \quad \rightarrow \text{Recta y plano son paralelos si} \quad a=1 \quad \rightarrow \quad \Pi: 5x+y+4z=5$$

La distancia de una recta a un plano, siendo ambos paralelos, es la distancia de un punto cualquiera de la recta a dicho plano. De la ecuación paramétrica de la recta es obvio que el punto $P(0,2,2)$ pertenece a la recta.

Usando la fórmula de la distancia de punto a plano:

$$d(P,\Pi)=\left|\frac{5\cdot 0+1\cdot 2+4\cdot 2-5}{\sqrt{5^2+1^2+4^2}}\right|=\left|\frac{5}{\sqrt{41}}\right|=\frac{5\sqrt{41}}{41}\ u$$