# Problemas – Tema 9

# Solución a problemas sobre Geometría - Hoja 9 - Problemas 3, 4

## Hoja 9. Problema 3

**3. Sean los planos** $\Pi_1: x+y=1$ **,** $\Pi_2: a\,y+z=0$ **,** $\Pi_3: x+(1+a)y+a\,z=a+1$ **.**

**a) Cuánto debe valer** $a$ **para que no tengan ningún punto en común?**

**b) Para** $a=0$ **determina la posición relativa de los planos.**

a) Los planos no tendrán ningún punto en común si el sistema $3x3$ formado por sus tres ecuaciones generales resulta incompatible.

$$\left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ a\,y+z=0 \\ x+(1+a)y+a\,z=a+1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Notación matricial} \rightarrow \quad A/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz del sistema, calculando en primer lugar su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}=a^2+1+0-(0+0+1+a)=a^2-a=a(a-1)$$

El determinante se anula si y solo si $a=0\,,a=1$ .

Realizamos la discusión de casos del rango en función de los valores del parámetro $a$ .

- Si $a=0\,ó\,a=1$ $\rightarrow$ $det(A)\neq 0 \rightarrow rango(A)=3 \rightarrow rango(A/D)=3$ $\rightarrow$ Por Rouché-Frobenius estamos ante un sistema compatibe determinado con solución única. Los tres planos se cortan en un punto.

- Si $a=0$ $\rightarrow$ $det(A)=0$ $\rightarrow$ Buscamos un menor no nulo $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\rightarrow$ $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$ $\rightarrow$ $rango(A)=2$ $\rightarrow$ Estudiamos el rango de la ampliado, comprobando en primer lugar la existencia de menores de orden 3 no nulos → $A/D=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)$ →

$|C_1\,C_2\,C_3|=0$ (coincide con el determinante de A)

$|C_1\,C_2\,C_4|=0$ (por tener las tres columnas iguales)

$|C_1\,C_3\,C_4|=0$ (por tener dos columnas iguales)

$|C_2\,C_3\,C_4|=0$ (por tener dos columnas iguales)

El rango de la ampliada también será dos, al no aparecer ningún menor de orden tres no nulo → $Rango(A)=2=Rango(A/D)<3=n^o\ incógnitas$ → Por Rouché-Frobenius estamos ante un sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones con un parámetro libre. La solución al sistema es una recta común a los tres planos

- Si $a=1$ → $det(A)=0$ → Buscamos un menor no nulo → $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}$ →

  $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1$ → $rango(A)=2$ → Estudiamos el rango de la ampliado, comprobando en primer lugar la existencia de menores de orden 3 no nulos → $A/D=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&2&1&2\end{array}\right)$ →

  $|C_1\,C_2\,C_3|=0$ (coincide con el determinante de A)

  $|C_1\,C_2\,C_4|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&2\end{vmatrix}=2+1+0-(0+0+0)=2\neq 0$ → $rango(A/D)=3\neq 2=rango(A)$ →

  Por Rouché-Frobenius estamos ante un sistema incompatible. No hay solución. Los planos no tienen ningún punto en común si $a=1$ .

b) Como hmos justificado en el apartado anterior, si $a=0$ → El rango de la ampliada también será dos, al no aparecer ningún menor de orden tres no nulo → $Rango(A)=2=Rango(A/D)<3=n^o\ incógnitas$ → Por Rouché-Frobenius estamos ante un sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones con un parámetro libre. La solución al sistema es una recta común a los tres planos.

# Hoja 9. Problema 4

**4. Sea la recta** $r:\left\{\begin{matrix} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{matrix}\right\}$ **.**

**a) Determina el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto** $P(1,1,1)$ **.**

**b) Halla los puntos de la recta cuya distancia al origen sea de 4 unidades.**

a) Si el plano es perpendicular a la recta, el vector director de la recta será igual al vector normal del plano. Pasamos la ecuación general de la recta a paramétricas para obtener su vector director.

$$r:\left\{\begin{matrix} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow x=\lambda \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} y=\frac{-3}{2}\lambda \\ z=-3\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=\frac{-3}{2}\lambda \\ z=-3\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{u}_r=(1,-\frac{3}{2,}-3)$$

Podemos tomar como vector director uno proporcional al obtenido, con objeto de no operar con fracciones. Por ejemplo $\vec{u}_r=(2,-3,-6) \rightarrow \vec{u_\Pi}=(2,-3,-6) \rightarrow \Pi:2x-3y-6z+D=0$ .

El término independiente se obtiene con la condición de que el plano pase por el punto $P(1,1,1)$ .

$$P\in\Pi \rightarrow 2-3-6+D=0 \rightarrow D=7 \rightarrow \Pi:2x-3y-6z+7=0$$

b) Tomamos un punto arbitrario de la recta, y forzamos que su distancia al origen de coordenadas sea igual a 4. El punto arbitrario lo tomamosde la ecuación paramétrica de la recta.

$r:\left\{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=\frac{-3}{2}\lambda \\ z=-3\lambda \end{matrix}\right\}$ → Punto arbitrario de la recta $A(\lambda,-\frac{3}{2}\lambda,-3\lambda)$

$$O(0,0,0) \rightarrow \vec{AO}=(\lambda,-\frac{3}{2}\lambda,-3\lambda) \rightarrow |\vec{AB}|=\sqrt{\lambda^2+\frac{9}{4}\lambda^2+9\lambda^2}=4 \rightarrow \sqrt{\frac{50}{4}\lambda^2}=4$$

$$\sqrt{50\lambda^2}=8 \rightarrow 50\lambda^2=64 \rightarrow \lambda=\pm\sqrt{\frac{64}{50}} \rightarrow \lambda=\frac{\pm 8}{5\sqrt{2}}=\frac{\pm 4\sqrt{2}}{5}$$

Puntos solución → $A_1(\frac{4\sqrt{2}}{5},-\frac{6\sqrt{2}}{5},\frac{-12\sqrt{2}}{5})$ , $A_2(\frac{-4\sqrt{2}}{5},\frac{6\sqrt{2}}{5},\frac{12\sqrt{2}}{5})$