Teoría – Tema 9

Ecuaciones del plano

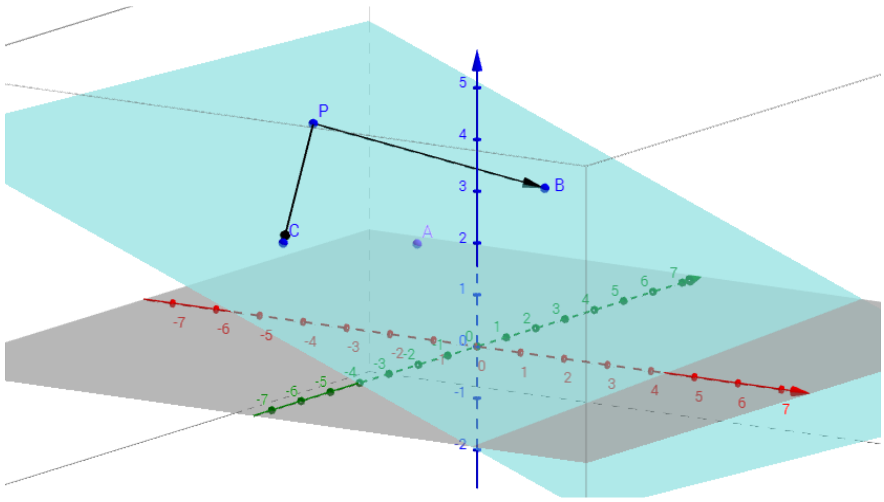
Índice de contenido

Determinación lineal de un plano. Ecuación vectorial y paramétrica

Si recordamos la teoría sobre las ecuaciones de la recta, comenzamos demostrando que dado un punto de la recta y un vector director de la recta podíamos escribir la ecuación vectorial de la recta. ¿Te acuerdas?

Pues ahora podemos escribir la ecuación vectorial del plano con la ayuda de un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ del plano y de dos vectores $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$ linealmente independientes.

Todos los puntos $P(x, y, z)$ *del plano vienen determinados por un punto* $A(x_0 y_{0,} z_0)$ *y dos vectores linealmente independientes* $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ *y* $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$



En efecto. Si denotamos los vectores linealmente independientes de la imagen superior como $\vec{PB}=\vec{u}$ y $\vec{PC}=\vec{v}$:

$$\vec{OP}=\vec{OA}+\vec{AP}$$

Por estar los tres vectores en el mismo plano, serán combinación lineal → $\vec{AP}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$. Por lo tanto:

$$\vec{OP}=\vec{OA}+\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$$
$$(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\alpha(u_x, u_y, u_z)+\beta(v_x, v_y, v_z)$$

Ecuación vectorial del plano

$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\alpha(u_x,u_y,u_z)+\beta(v_x,v_y,v_z)$

$(x_{0,}y_0,z_0)$ → Coordenadas de un punto del plano

(u_x,u_y,u_z) , (v_x,v_y,v_z) → Dos vectores del plano linealmente independientes

Es decir, con un punto y dos vectores linealmente independientes tenemos la ecuación del plano. Esto debe ser un mantra espiritual que debemos repetir para interiorizar:

“Con un punto y dos vectores linealmente independientes tenemos la ecuación del plano”, *“Con un punto y dos vectores linealmente independientes tenemos la ecuación del plano”*, *“Con un punto y dos vectores linealmente independientes tenemos la ecuación del plano”*...

Esta terna de valores (punto, vector, vector) se conoce como determinación lineal de un plano.

$\Pi(\vec{u},\vec{v},A)$ → **Determinación lineal de un plano a partir de un punto y dos vectores**

Expresando la ecuación vectorial en sus tres componentes, llegamos a la ecuación paramétrica.

Ecuación paramétrica del plano

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha\cdot u_x+\beta\cdot v_x \\ y=y_0+\alpha\cdot u_y+\beta\cdot v_y \\ z=z_0+\alpha\cdot u_z+\beta\cdot v_z \end{cases}$$

Ejemplo

Hallar las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $P(2,3,1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}=(-1,2,4)$ y $\vec{v}=(1,2,1)$.

Recordamos que **para obtener la ecuación de un plano necesitamos un punto y dos vectores que sean linealmente independientes**.

Para demostrar que dos vectores son linealmente independientes tenemos muchas formas de operar. Una, por ejemplo, es aplicar la definición:

$a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}=\vec{0}$ con $a=b=0$

Planteamos el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas (recuerda que las incógnitas son a, b), y resolvemos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow F'_2 = F_2 + 2F_1 \ , \ F'_3 = F_3 + 4F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$ → Las filas F_2 y F_3 con proporcionales → Podemos obviar una → $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$ → Llegamos a una matriz triangular con dos ecuaciones no nulas → 2 ecuaciones y 2 incógnitas → Solución única → S.C.D. → $a=b=0$ por ser el sistema homogéneo.

Otra forma de demostrarlo es usar determinantes para comprobar que el rango de la matriz de coeficiente es 2, y que coincide con el rango al de la matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$ → Menor de orden 2 → $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ → $Rango(A) = 2$.

$$|A/C| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ → Hay una columna de términos nulos → $Rango(A/C) = 2$

Si los vectores son linealmente independientes, planteamos la **ecuación paramétrica**.

$$\begin{Bmatrix} x = 2 + \alpha \cdot (-1) + \beta \\ y = 3 + \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 2 \\ z = 1 + \alpha \cdot 4 + \beta \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x = 2 - \alpha + \beta \\ y = 3 + 2\alpha + 2\beta \\ z = 1 + 4\alpha + \beta \end{Bmatrix}$$

¿Cómo puedo obtener un punto cualquiera del plano?

Dando valores a las coordenadas x, y para operar en el sistema y obtener el valor de z . Por ejemplo: Si $x=0, y=0$:

$$\begin{Bmatrix} 0 = 2 - \alpha + \beta \\ 0 = 3 + 2\alpha + 2\beta \\ z = 1 + 4\alpha + \beta \end{Bmatrix}$$ → De las dos primeras ecuaciones → $\begin{Bmatrix} 0 = 2 - \alpha + \beta \\ 0 = 3 + 2\alpha + 2\beta \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} 0 = 4 - 2\alpha + 2\beta \\ 0 = 3 + 2\alpha + 2\beta \end{Bmatrix}$$ → Sumamos → $0 = 7 + 4\beta \rightarrow \beta = \frac{-7}{4}$

$$\begin{Bmatrix} 0 = 4 - 2\alpha + 2\beta \\ 0 = 3 + 2\alpha + 2\beta \end{Bmatrix}$$ → Restamos → $1 = 7 - 4\alpha \rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

Y llevamos los valores $\alpha = \frac{3}{2}$ y $\beta = \frac{-7}{4}$ a la tercera ecuación paramétrica para obtener el valor de la variable z .

$z = 1 + 4\alpha + \beta \rightarrow z = 1 + 6 - \frac{7}{4} \rightarrow z = \frac{21}{4}$ → **Nuestro punto es** $P\left(0, 0, \frac{21}{4}\right)$.

¿Cómo puedo saber si un punto concreto pertenece al plano?

Sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación paramétrica del plano y comprobar si existe solución para las incógnitas α,β . Por ejemplo: **¿Pertenece** $P\left(0,0,\frac{21}{4}\right)$ **al plano?**

$\left\{\begin{array}{c} x=2-\alpha+\beta \\ y=3+2\alpha+2\beta \\ z=1+4\alpha+\beta \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} 0=2-\alpha+\beta \\ 0=3+2\alpha+2\beta \\ \frac{21}{4}=1+4\alpha+\beta \end{array}\right\}$ → Solución única $\alpha=\frac{3}{2},\beta=\frac{-7}{4}$ → **Sí pertenece al plano.**

¿Pertenece $Q(-1,1,0)$ **al plano?**

$\left\{\begin{array}{c} x=2-\alpha+\beta \\ y=3+2\alpha+2\beta \\ z=1+4\alpha+\beta \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} -1=2-\alpha+\beta \\ 1=3+2\alpha+2\beta \\ 0=1+4\alpha+\beta \end{array}\right\}$

Trabajamos con las dos primeras ecuaciones → $\left\{\begin{array}{c} -1=2-\alpha+\beta \\ 1=3+2\alpha+2\beta \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} -3=-\alpha+\beta \\ -2=2\alpha+2\beta \end{array}\right\}$

$\left\{\begin{array}{c} -6=-2\alpha+2\beta \\ -2=2\alpha+2\beta \end{array}\right\}$ → Sumamos → $-8=4\beta \rightarrow \beta=-2$

$\left\{\begin{array}{c} -6=-2\alpha+2\beta \\ -2=2\alpha+2\beta \end{array}\right\}$ → Restamos → $-4=-4\alpha \rightarrow \alpha=1$

Llevamos estos dos valores a la tercera ecuación paramétrica para saber si se cumple.

$0=1+4\alpha+\beta \rightarrow 0=1+4-2 \rightarrow 0=3$ → Absurdo matemático → **No pertenece al plano.**

Ecuación general o implícita del plano

Vamos a eliminar parámetros de la ecuación paramétrica del plano.

$$\begin{Bmatrix} x=x_0+\alpha\cdot u_x+\beta\cdot v_x \\ y=y_0+\alpha\cdot u_y+\beta\cdot v_y \\ z=z_0+\alpha\cdot u_z+\beta\cdot v_z \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Consideramos } \alpha \text{ y } \beta \text{ incógnitas} \rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha\cdot u_x+\beta\cdot v_x=x-x_0 \\ \alpha\cdot u_y+\beta\cdot v_y=y-y_0 \\ \alpha\cdot u_z+\beta\cdot v_z=z-z_0 \end{Bmatrix}$$

Expresamos el sistema en su notación matricial, con la matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_x & v_x & x-x_0 \\ u_y & v_y & y-y_0 \\ u_z & v_z & z-z_0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Matriz ampliada } 3x3$$

¿Qué tenemos en la matriz ampliada? Tenemos dos vectores columnas, que forman tres ecuaciones con dos incógnitas (recordamos que las incógnitas son los valore α y β). Y al añadir la columna de términos independientes, pasamos a una matriz ampliada de tres filas y tres columnas.

Si los dos vectores del plano son linealmente independientes, el rango de la matriz y de la matriz ampliada $3x3$ debe ser 2. Recuerda que el rango es el número de vectores linealmente independientes contenidos en la matriz.

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_x & v_x & x-x_0 \\ u_y & v_y & y-y_0 \\ u_z & v_z & z-z_0 \end{array}\right) \rightarrow \quad Rango(A)=2=Rango(A/C)$$

Y si el rango es 2, el determinante $3x3$ de la matriz ampliada debe ser nulo, ¿verdad?

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x & x-x_0 \\ u_y & v_y & y-y_0 \\ u_z & v_z & z-z_0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Al desarrollar por Sarrus} \rightarrow \quad Ax+By+Cz+D=0$$

Ecuación general o implícita del plano

$Ax+By+Cz+D=0$ → Una única ecuación donde aparecen 1, 2 ó 3 incógnitas

Ejemplo

Hallar las ecuación general del plano que pasa por el punto $P(2,3,1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}=(-1,2,4)$ y $\vec{v}=(1,2,1)$.

En el ejemplo del apartado anterior ya demostramos que los vectores son linealmente independientes, y llegamos a la ecuación paramétrica siguiente:

$$\left\{\begin{matrix} x=2-\alpha+\beta \\ y=3+2\alpha+2\beta \\ z=1+4\alpha+\beta \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Matriz ampliada} \rightarrow \quad A/C=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x-2 \\ 2 & 2 & y-3 \\ 4 & 1 & z-1 \end{array}\right)$$

El determinante de la matriz asociada debe ser nulo, ya que el rango de A/C no puede ser 3 ya que solo tenemos dos vectores linealmente independientes. Por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 2 & 2 & y-3 \\ 4 & 1 & z-1 \end{vmatrix}=0$$

Podemos aplicar Sarrus directamente, o bien aplicar propiedades de determinantes para obtener unos productos finales más sencillos.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 2 & 2 & y-3 \\ 4 & 1 & z-1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow F'_2=F_2+2F_1 \quad , \quad F'_3=F_3+4F_1 \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 0 & 4 & y-3+2(x-2) \\ 0 & 5 & z-1+4(x-2) \end{vmatrix}=0$$

$$\rightarrow \quad F'_3=4F_3-5F_2 \rightarrow \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 0 & 4 & y-3+2(x-2) \\ 0 & 0 & 4[z-1+4(x-2)]-5[y-3+2(x-2)] \end{vmatrix}=0$$

Ya tenemos un determinante de una matriz diagonal, por lo que el determinante final es el producto de los términos de la diagonal principal.

$$\frac{1}{4}\cdot 4\cdot[4(z-1+4(x-2))-5(y-3+2(x-2))]=0$$

$$4(z+4x-9)-5(y+2x-7)=0$$

$$4z+16x-36-5y-10x+35=0$$

$$6x-5y+4z-1=0$$

Recuerda nuestro rema espiritual: siempre podemos obtener la ecuación paramétrica del plano a partir de un punto y de dos vectores linealmente independientes... y de ahí podemos llegar a la ecuación general haciendo nulo el determinante de la matriz ampliada asociada.

Ejemplo

Determina la ecuación paramétrica del plano Π de ecuación implícita $x-2y+2z-3=0$.

¿Qué necesito para a ecuación paramétrica? **Un punto y dos vectores linealmente independientes**. Pues... obtengamos estos tres datos de la ecuación implícita.

¿Cómo saco el valor de un punto? Eso ya lo sabemos: dando valores a x e y , para obtener z .

Si $x=0, y=0 \rightarrow 2z-3=0 \rightarrow z=\frac{3}{2}$ → Punto $A(0,0,\frac{3}{2})$

¿Cómo obtenemos los dos vectores? Si sacamos otros dos puntos B , C podremos trazar los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y tras comprobar si son linealmente independientes, obtener la ecuación paramétrica. ¡¡Vamos a ello!!

Si $x=0, y=1 \rightarrow -2+2z-3=0 \rightarrow z=\frac{5}{2}$ → Punto $B(0,1,\frac{5}{2})$

Si $x=1, y=0 \rightarrow 1+2z-3=0 \rightarrow z=1$ → Punto $C(1,0,1)$

Trazamos los vectores:

$\vec{AB}=(0,1,1)$

$\vec{AC}=(1,0,\frac{-1}{2})$

Visualmente ya intuimos que son linealmente independientes, nada más ver sus componentes. No hay ningún número real que nos permita pasar de un vector a otro.

Una comprobación rigurosa es aplicar determinantes para obtener el rango de la siguiente matriz, y verificar que el rango es igual a 2.

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{vmatrix}$ → Existe un menor de orden 2 no nulo → $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ → Rango 2 → Ambos vectores son linealmente independientes.

Una vez realizada esta comprobación, podemos tomar ambos vectores $\vec{AB}=(0,1,1)$ y $\vec{AC}=(1,0,\frac{-1}{2})$ y , por ejemplo, el punto $A(0,0,\frac{3}{2})$ para escribir la paramétrica.

$$\begin{Bmatrix} x=\beta \\ y=\alpha \\ z=\frac{3}{2}+\alpha-\frac{\beta}{2} \end{Bmatrix}$$

Ya lo tenemos. Y como somos muy frikis, vamos a profundizar realizando el paso inversa: pasar de esta ecuación paramétrica recién obtenida a la ecuación general... y verificar que obtenemos la ecuación que nos daba inicialmente el problema.

¿Quién dijo miedo?

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & \frac{-1}{2} & z-\frac{3}{2} \end{vmatrix}=0$ → Aplicamos Sarrus → $0+y-\frac{x}{2}-\left(0+0+z-\frac{3}{2}\right)=0$ →

→ $y-\frac{x}{2}-z+\frac{3}{2}=0$ → $\frac{-x}{2}+y-z+\frac{3}{2}=0$ → Multiplicamos por (-2) →

→ $x-2y+2z-3=0$

Y llegamos a la misma ecuación implícita del inicio.

Estos problemas de pasar de paramétrica a general o de general a paramétrica son muy típicos... y debemos practicar hasta la saciedad para pasar de una a otra forma de expresar el plano.

La ecuación general nos presenta una ecuación de coeficientes que multiplican a cada una de las incógnitas x, y, z más un término independiente. Algunos casos especiales de esta ecuación general son los siguientes.

- Si $A=0$ → $By+Cz+D=0$ → El plano no corta al eje OX → El plano es paralelo al eje OX .
- Si $B=0$ → $Ax+Cz+D=0$ → El plano no corta al eje OY → El plano es paralelo al eje OY .
- Si $C=0$ → $Ax+By+D=0$ → El plano no corta al eje OZ → El plano es paralelo al eje OZ .
- Si $A=0$ y $B=0$ → $Cz+D=0$ → El plano no corta al eje OX ni al eje OY → El plano es paralelo al plano XY → Corta al eje OZ en $z=\frac{-D}{C}$.
- Si $A=0$ y $C=0$ → $By+D=0$ → El plano no corta al eje OX ni al eje OZ → El plano es paralelo al plano XZ → Corta al eje OY en $y=\frac{-D}{B}$.
- Si $B=0$ y $C=0$ → $Ax+D=0$ → El plano no corta al eje OY ni al eje OZ → El plano es paralelo al plano YZ → Corta al eje OX en $x=\frac{-D}{A}$.

Por norma general, **si falta alguna de las variables en la ecuación general significa que el plano será paralelo al eje cartesiano asociado a esa variable**.

Ecuación segmentaria de un plano

Como hemos aplicado ya en uno de los ejemplos anteriores, si tenemos tres puntos no alineados de un plano tenemos la ecuación del plano (podemos aplicar la determinación lineal $\Pi(\vec{u}, \vec{v}, A)$).

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3) \in \Pi$ → Tres puntos no alineados

$\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\vec{AC}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$ → Lineal. Independientes

Donde la ecuación general, como ya hemos demostrado en el apartado anterior, se obtiene de anular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 & y-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 & z-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Supongamos que nuestro plano corta a los tres ejes cartesianos en los siguientes puntos:

$A(a,0,0)$ → Corte con el eje OX

$B(0,b,0)$ → Corte con el eje OY

$C(0,0,c)$ → Corte con el eje OZ

Por lo tanto los vectores resultan:

$\vec{AB}=(-a, b, 0)$, $\vec{AC}=(-a, 0, c)$

Quedando el determinante:

$$\begin{vmatrix} -a & -a & x-a \\ b & 0 & y \\ 0 & c & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow \quad bc(x-a)+ac\,y+ab\,z=0 \rightarrow \quad bc\,x+ac\,y+ab\,z=abc$$

Dividiendo ambos miembros por abc llegamos a la ecuación segmentaria del plano.

Ecuación segmentaria o canónica del plano

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ → Una única ecuación donde aparecen 1, 2 ó 3 incógnitas

$A(a,0,0)$ → Corte del plano con el eje OX

$B(0,b,0)$ → Corte del plano con el eje OY

$C(0,0,c)$ → Corte del plano con el eje OZ

Ejemplo

Determina la ecuación segmentaria del plano $\Pi: x+2y+4z-4=0$.

Debemos llevar el término independiente a la derecha de la igualdad y dejarlo reducido al valor 1 . Es decir:

$$\Pi: x+2y+4z-4=0 \rightarrow x+2y+4z=4 \rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$$

La ecuación canónica también es útil para obtener, rápidamente, tres punto del plano. Observando la ecuación canónica obtenida es inmediato que los siguientes tres puntos pertenecen al plano:

$A(4,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,1)$

En los planos que corten a los tres ejes coordenadas, es muy fácil pasar de la ecuación general a la paramétrica, ya que la ecuación canónica nos da tres puntos del plano, de donde podemos obtener dos vectores (que seguro serán linealmente independientes) y de ahí aplicar la determinación lineal $\Pi(\vec{u},\vec{v},A)$.